Процессы поглощения и синхротронного излучения фотона в технике матрицы плотности

Гвоздев А.А., Сабитов А.А.

ЯрГУ им.П.Г.Демидова

Ярославль, 2025

Введение

- Техника вычисления базируется на выражении матрицы плотности заряженного фермиона в постоянном однородном магнитном поле
- Используется остаточная инвариантность/ковариантность при преобразовании Лоренца вдоль по полю
- Идеально подходит для одновершинных процессов
- Вычисляем интенсивность поглощения и излучения фотона в $\gamma \to e^- e^+, \quad e \to e + \gamma$
- Полученные аналитические выражения необходимы для численного моделирования спектров излучения в полярных шапках магнитаров

Процесс аннигиляции фотона в электрон-позитронную пару

$$I_{\gamma\to e^+e^-} \equiv W_{\gamma\to e^+e^-}\cdot\omega = \omega\int\sum_{n,n',s,s'}\frac{|S_{if}|^2}{\tau}dn_{e^-}dn_{e^+},$$

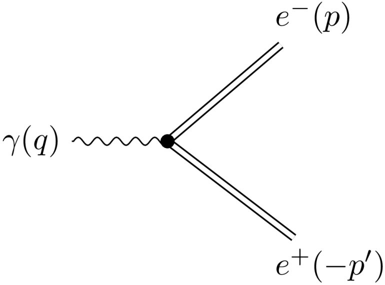
Числа состояний в элементе фазового объёма:

$$dn_{e^-} = \frac{dp_2 dp_3}{(2\pi)^2}L_y L_z \quad dn_{e^+} = \frac{dp_2' dp_3'}{(2\pi)^2}L_y L_z$$

$$|i\rangle = \gamma, \{\varepsilon_\mu^{(\lambda)}(q), \omega, \vec{q}\},$$

$$|f\rangle = e^-\{E_n, p_2, p_3, s\}, e^+\{E_{n'}, p_2', p_3', s'\}$$

$$\vec{B} = (0,0,B) \quad A^\mu = (0,0,Bx,0), \quad E_n = \sqrt{p_3^2 + 2eBn + m^2}$$



В низшем порядке теории возмущений:

$$S_{if} = \frac{ie}{\sqrt{2\omega V}} \int d^4x\, e^{-iqx} \left[\overline{\Psi}^{(+)}_{E_n,p_2,p_3,s}(x)\, \hat{\varepsilon}^{(\lambda)}(q)\, \Psi^{(-)}_{E'_n,p'_2,p'_3,s'}(x) \right].$$

Матрица плотности заряженного фермиона в постоянном однородном магнитном поле

При вычислении $|S_{if}|^2$:

$$|S_{if}|^2 = \frac{e^2}{2\omega V}\int d^4x \int d^4x' e^{-iq(x-x')} Sp\Big\{\Psi^{(+)}_{E_n,p_2,p_3,s}(x')\overline{\Psi}^{(+)}_{E_n,p_2,p_3,s}(x)$$
$$\times\hat{\varepsilon}^{\lambda}(q)\cdot\Psi^{(-)}_{E'_n,p'_2,p'_3,s'}(x)\overline{\Psi}^{(-)}_{E'_n,p'_2,p'_3,s'}(x')\hat{\varepsilon}^{*\lambda}(q)\Big\}.$$

$$\sum_s \Psi^{+}_{E_n,p_2,p_3,s}(x')\overline{\Psi}^{(+)}_{E_n,p_2,p_3,s}(x) =$$
$$\frac{e^{-ie\Phi(x',x)}}{2E_n L_y L_z}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ip(x'-x)}\cdot\rho_n^{(+)}(p)\left(\frac{dp_1}{2\pi}\right),$$

$$\sum_{s'} \Psi^{-}_{E'_n,p'_2,p'_3,s'}(x)\overline{\Psi}^{(-)}_{E'_n,p'_2,p'_3,s'}(x') =$$
$$\frac{e^{-ie\Phi(x,x')}}{2E'_n L'_y L'_z}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{+ip'(x-x')}\cdot\rho_{n'}^{(-)}(p')\left(\frac{dp'_1}{2\pi}\right),$$

$$\Phi(x,x') = \frac{eB}{2}(x_1+x'_1)(x_2-x'_2), \quad \Phi(x,x') = -\Phi(x',x)$$

[Гвоздев А.А. Осокина Е.В, ТМФ, 2014]

Явный вид матрицы плотности

Матрицы плотности

$$\rho_n^{(+)}(p) = (-1)^n \cdot 2e^{-u/2}\left[(\hat{p}_{\|} + m)(\Pi_- L_n(u)) - \Pi_+ L_{n-1}(u)) + 2\hat{p}_{\perp} L_{n-1}^1(u)\right],$$

$$\rho_{n'}^{(-)}(p') = (-1)^{n'} \cdot 2e^{-u'/2}\left[(\hat{p'}_{\|} - m)\big(\Pi_- L_{n'}(u') - \Pi_+ L_{n'-1}(u')\big) + {} + 2\hat{p'}_{\perp} L_{n'-1}^1(u')\right].$$

Явный вид матрицы плотности. Обозначения

В выражениях для матриц плотности введены следующие обозначения:

$$\hat{p}_{||} = E_n\gamma^0 - p_3\gamma^3, \quad \hat{p}_{\perp} = p_1\gamma^1 + p_2\gamma^2$$

$L_n(u), L^1_{n-1}(u)$ – полиномы и присоединенные полиномы Лагера, $u = 2p_{\perp}^2/eB$, $\Pi_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \Sigma_3)$ – оператор проекции спина на направление магнитного поля. Пространство разбивается на (0,3) – параллельное и (1,2) – перпендикулярное $\vec{B}$. Вводятся обезразмеренные:

$$\varphi_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}/B, \quad \tilde{\varphi}_{\mu\nu} = \tilde{F}_{\mu\nu}/B, \quad \Lambda_{\mu\nu} = (\varphi\varphi)_{\mu\nu}$$

$$\tilde{\Lambda}_{\mu\nu} = (\tilde{\varphi}\tilde{\varphi})_{\mu\nu}, \quad \tilde{\Lambda}_{\mu\nu} - \Lambda_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}.$$

Интенсивность "поглощения"фотона

$$I^{(\lambda)}_{\gamma\longrightarrow e^+e^-} = \frac{\alpha}{8\pi}\sum_{n,n'}\int\frac{d^3\vec{p}}{E_n}\int\frac{d^3\vec{p'}}{E_{n'}}\delta^{(4)}(p+p'-q)\times$$
$$\times Sp\Big\{\rho_n^{(+)}(p)\hat{\varepsilon}^{\lambda}(q)\cdot\rho_{n'}^{(-)}(p')\hat{\varepsilon}^{*\lambda}(q)\Big\}.$$

Вектора поляризации фотонов обыкновенной и необыкновенной моды.

$$\hat{\varepsilon}^{(\lambda)}(q) = \varepsilon_\mu^{(\lambda)}\,\gamma^\mu(q),\quad \varepsilon_\mu^{(1)} = \frac{(q\varphi)_\mu}{\sqrt{q_\perp^2}},\quad \varepsilon_\mu^{(2)} = \frac{(q\tilde{\varphi})_\mu}{\sqrt{q_\parallel^2}}$$

Интеграл по d^2p_3, d^2p_3' удобно вычислять в системе $q_3 = 0$.

Интенсивность "поглощения"фотона

$$I^{(\lambda)}_{\gamma\longrightarrow e^+e^-} = 2\alpha\cdot eB\sum_{n,n'=0}^{\infty}\frac{\theta(q_{\|}^2-\varepsilon^2_{n'n})\cdot K^{(1,2)}_{n'n}}{\sqrt{(q_{\|}^2-\varepsilon^2_{n'n})(q_{\|}^2+(\varepsilon_{\perp n}-\varepsilon_{\perp n'})^2)}}$$

$$K^{(1)}_{n',n} = \frac{2(eB)^2(n-n')^2}{q_{\perp}^2}\cdot\Phi(x)+(q_{\|}^2/2-2eB(n+n'))\Psi(x),$$

$$K^{(2)}_{n',n} = 2\left[eB(n+n')-\frac{(eB)^2}{q_{\|}^2}(n-n')^2+m^2\right]\Phi(x)-\frac{q_{\perp}^2}{2}\Psi(x).$$

Интенсивность "поглощения"фотона

Выше введены обозначения:

$$\Phi = F^2_{n,n'}(x) + F^2_{n'-1,n-1}(x), \quad \Psi = F^2_{n',n-1}(x) + F^2_{n'-1,n}(x),$$

где $F_{n,n'}(x)$ – функции Лагера $x = q_\perp^2/2eB$.

$$F_{n',n}(x) = (-1)^{n'-n} F_{n,n'}(x) = \sqrt{\frac{n'!}{n!}} \cdot x^{\frac{n-n'}{2}} \cdot L^{n-n'}_{n'}(x) \cdot e^{-x/2}.$$

$$\varepsilon^2_{nn'} \equiv (\varepsilon_{\perp n} + \varepsilon_{\perp n'})^2, \quad \varepsilon_{\perp n} = \sqrt{2eBn + m^2}$$

[КаминкерА.Д.,ЯковлевД.Г, ТМФ, 1981]

Интенсивность "поглощения"фотона

Усреднение по поляризациям фотона на массовой поверхности приводит к резкому упрощению:

$$\overline{K}_{n',n} = eB(n+n')\left[\Phi - \Psi\right] + m^2\Phi$$

Интенсивность излучения фотона

Синхротронное излучение – кроссинг-процесс аннигиляции:

$$e^{-}(n) \longrightarrow e^{-}(n') + \gamma$$

Интенсивность синхротронного излучения может быть вычислена следующим образом. При фиксированных (n,n') в выражении вероятности процесса сумма по всем начальным, конечным состояниям электрона:

$$\tilde{I}_{nn'} = \tilde{W}_{e^{-}(n)\rightarrow e^{-}(n')+\gamma} \cdot \omega$$

$$\tilde{I}_{e\longrightarrow e+\gamma} = \sum_{n,n'} \tilde{I}_{nn'}$$

Таким образом, "парциальная"интенсивность излучения может быть получена той же самой техникой при замене всюду $p' \longrightarrow -p'$

Интенсивность излучения фотона

$$\tilde{I}^{(1,2)}_{nn'} = 2\alpha \cdot eB \frac{\theta\left(\varepsilon_{\perp n} - \varepsilon_{\perp n'} - \sqrt{q_{\parallel}^2}\right) \cdot \tilde{K}^{(1,2)}_{n,n'}}{\sqrt{(\varepsilon^2_{nn'} - q^2_{\parallel})((\varepsilon_{\perp n} - \varepsilon_{\perp n'})^2 - q^2_{\parallel})}}$$

$$\tilde{K}^{(1)}_{n',n} = \left(2eB(n+n') - q^2_{\parallel}\right)\Psi - \frac{2(eB)^2(n-n')^2}{q^2_{\perp}} \cdot \Phi$$

$$\tilde{K}^{(2)}_{n,'n} = q^2_{\perp} \cdot \Psi - 2\left[eB(n-n') - \frac{(eB)^2(n-n')^2}{q^2_{\parallel}} + m^2\right]\Phi$$

Интенсивность излучения фотона

При усреднении по поляризациям фотона на массовой поверхности $q^2 = 0$

$$\overline{\tilde{K}}_{n,n'} = -\overline{K}_{n',n} = eB(n+n')\,[\Psi - \Phi] - m^2 \cdot \Phi$$

Обсуждение результатов

Интенсивности имеют корневые особенности:

$\sim \sqrt{q_{\|}^2 - \varepsilon_{nn'}^2}$ (процесс аннигиляции),

$\sim \sqrt{(\varepsilon_{n\perp} - \varepsilon_{n'\perp})^2 - q_{\|}^2}$ (процесс излучения).

Физически смысл:

$q_3 = 0, \quad p_3' + p_3 = 0, \quad \omega_{min} = \varepsilon_{\perp n} + \varepsilon_{\perp n'}$ – процесс аннигиляции

$q_3 = 0, \quad p_3' - p_3 = 0, \quad \omega_{max} = \varepsilon_{\perp n} - \varepsilon_{\perp n'}$ – процесс излучения

Корневая особенность – эффект фазового объема, связанный с полудискретным спектром энергии электрона

[Shabad, Ann.Phys, 1975]

Обсуждение результатов

Процесс аннигиляции – тензор поляризации фотона имеет корневые особенности в точках циклотронных резонансов $\varepsilon^2_{nn'}$, связанные с полудискретным спектром виртуальной (e^+e^-)-пары. Поскольку вероятность процесса определяется через мнимую часть оператора поляризации, она имеет такие же особенности.

Закон дисперсии фотона определяется решением уравнения:

$$q^2 - æ^{(\lambda)}(q_{\|}^2, q_{\perp}^2) = 0,$$

где $æ^{(\lambda)}(q_{\|}^2, q_{\perp}^2)$ – собственные значения тензора поляризации в базисе $\{\varepsilon_\mu^{(1,2)}\}$

Как показывает решение уравнений [Шабад,Тр.ФИАН, 1988] в окресности точек циклотронных резонансов происходит ветвление кривых дисперсии

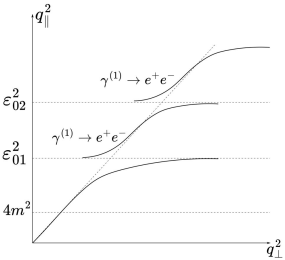


Рис.: Дисперсионные кривые для моды фотона $\lambda = 1$

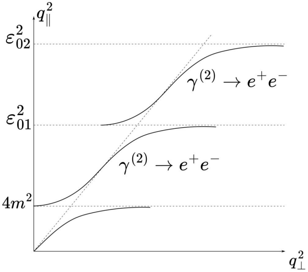


Рис.: Дисперсионные кривые для моды фотона $\lambda = 2$

Аналитические формулы интенсивностей $I_{nn'}, \tilde{I}_{nn'}$ совпадают с соответствующими в работе [Baier, Katkov, Phys.Rev.D, 2007] при переходе на массовую поверхность фотона ($q^2 = 0$).

Предел сильного поля

$\beta = eB/m^2, \quad \beta \sim (10 - 10^2)$ – для магнитаров

$$\chi = \frac{\sqrt{e^2(qFFq)}}{m^3} = \beta \cdot \sqrt{q_\perp^2/m^2}$$

Рассмотрим случай $\beta \gg 1$ (предел сильного поля). В таком случае, в выражения для интенсивностей важен вклад <u>низших</u> циклотронных резонансов:

$\{\varepsilon_{01}^2, \varepsilon_{02}^2, \varepsilon_{03}^2, \varepsilon_{04}^2, \varepsilon_{05}^2, \varepsilon_{12}^2, ..\} \Rightarrow \{\varepsilon_{0n}^2\}, n \le 5$

Рассмотрим циклотронный резонанс ε_{01}^2. Полученные нами выражения дают:

$$\tilde{I}_{10}^{(1)} \simeq \alpha eB \frac{\theta(1-\delta-y)}{\sqrt{(1-y)^2-\delta^2}}(1-y)\cdot e^{-x},$$

$$\tilde{I}_{10}^{(2)} \simeq \alpha eB \frac{\theta(1-\delta-y)}{\sqrt{(1-y)^2-\delta^2}}\frac{x}{y}(1-y(1+\delta^2))\cdot e^{-x}$$

Закон дисперсии [Шабад, Тр.ФИАН, 1988]:

$$y - x \simeq -\frac{\alpha\beta^{-1/4}x\cdot e^{-x}}{2^{1/4}\sqrt{1+\delta-y}},$$

$$\delta^2 = 2/\beta, \quad x = q_\perp^2/2eB, \quad y = q_\parallel^2/2eB.$$

Таким образом в пределе сильного поля ($\beta \gg 1$) интенсивность излучения не содержит особенностей:

$$\tilde{I}_{10}^{(1)} \simeq \alpha e B \cdot e^{-x},$$

$$\tilde{I}_{10}^{(2)} \simeq \alpha e B \cdot \frac{x}{y} \cdot e^{-x},$$

закон дисперсии в особой точке близок к вакууму даже в случае магнитаров:

$$y - x_{|y=1-\delta} \simeq -\frac{\alpha}{2} x \cdot e^{-x} \sim O(\alpha)$$