Точные решения радиального уравнения для скалярного поля в метрике Керра

Волобуев И.П., Кейзеров С.И. Рахметов Э.Р.

Введение

Проблема квантования полей в искривленном пространстве-времени уже давно обсуждается в литературе. Одним из наиболее интересных случаев является пространство-время черной дыры, и наиболее известным эффектом, связанным с черными дырами, для которого необходима квантовая теория поля, является эффект Хокинга. Простейшим примером черной дыры является черная дыра Шварцшильда, для которой проблема квантования полей обсуждалась в большом числе работ. В частности, в работе

V. Egorov, M. Smolyakov and I. Volobuev, "Doubling of physical states in the quantum scalar field theory for a remote observer in the Schwarzschild spacetime," Phys. Rev. D **107** (2023) no.2, 025001

на основе численного исследования решений уравнений поля в пространстве-времени Шварцшильда была построена последовательная квантовая теория действительного скалярного поля. Точные решения уравнений поля для этого случая были найдены в работе

Волобуев И.П., Кейзеров С.И., Рахметов Э.Р., «Точные решения для массивного скалярного поля в гравитационном поле черной дыры Шварцшильда», Физмат т. 1 № 2 (2024) 75-87

В настоящем докладе будет получено уравнение движения для скалярного поля в метрике вращающейся черной дыры. Будет показано, что зависимость от полярного угла θ и от радиальной координаты r описывается функциями, удовлетворяющими конфлюэнтному уравнению Гойна. Будут построены физические решения, нормированные на дельта-функцию от модуля импульса. Энергетический спектр решений при этом оказывается непрерывным во всем диапазоне энергий, в том числе и при энергиях состояний меньше массы поля. При энергиях состояний больше массы поля возникает двукратное вырождение состояний с одинаковыми наборами квантовых чисел.

Уравнение движения для скалярного поля в метрике Керра

Метрика Керра (все величины нормированы на $r_0 \equiv 2M$)

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r}{\Sigma}\right) dt^2 + 2J \frac{r \sin^2\theta}{\Sigma} dt d\varphi - \left(r^2 + J^2 \left(1 + \frac{r \sin^2\theta}{\Sigma}\right)\right) \sin^2\theta d\varphi^2 - \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 - \Sigma d\theta^2$$

$$\Sigma \equiv r^2 + J^2 \cos^2\theta \qquad \Delta \equiv r^2 - r + J^2$$

Уравнение движения для скалярного поля массы μ

$$\left[\Box + \mu^2\right]\phi = 0$$

$$\Box = \frac{1}{\Sigma \sin\theta} \partial_\alpha \Sigma \sin\theta g^{\alpha\beta} \partial_\beta =$$

$$= \frac{1}{\Delta}\left[r^2 + J^2\left(1 + \frac{r\sin^2\theta}{\Sigma}\right)\right]\partial_t^2 + 2\frac{Jr}{\Delta\Sigma}\partial_t\partial_\varphi - \frac{1}{\Delta \sin^2\theta}\left(1 - \frac{r}{\Sigma}\right)\partial_\varphi^2 +$$

$$- \frac{1}{\Sigma}\partial_r \Delta \partial_r - \frac{1}{\Sigma \sin\theta}\partial_\theta \sin\theta \partial_\theta$$

Уравнение движения для скалярного поля в метрике Керра

Разделение переменных

$$\phi = e^{-i\omega t} e^{im\varphi} \Omega(\theta) R(r)$$

Где Ω и R удовлетворяют уравнениям

$$\left[\partial_\theta^2 + \operatorname{ctg}\theta \partial_\theta - \frac{m^2}{\sin^2\theta} + J^2\left(\omega^2 - \mu^2\right)\cos^2\theta - \lambda\right]\Omega = 0$$

$$\left\{\left(r^2 - r + J^2\right)\partial_r^2 + \left(2r - 1\right)\partial_r + \left(\omega^2 - \mu^2\right) r^2 + \omega^2 r + \frac{\left(\omega r - Jm\right)^2}{r^2 - r + J^2} + \lambda\right\} R = 0$$

После подстановки

$$\cos\theta \equiv z \qquad -1 \le z \le 1$$

и несложных преобразований уравнение для Ω переписывается в виде

$$\left[\partial_z\left(1 - z^2\right)\partial_z + J^2\left(\omega^2 - \mu^2\right)\left(z^2 - 1\right) + \left(J^2\left(\omega^2 - \mu^2\right) - \lambda\right) - \frac{m^2}{1 - z^2}\right]\Omega = 0$$

- в самосопряженной форме конфлюэнтного уравнения Гойна (КУГ)

Уравнение движения для скалярного поля в метрике Керра

Аналогично, после замены радиальной переменной

$$r = r_+ - (r_+ - r_-)\rho \qquad r_\pm \equiv \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1-4J^2}\right) \qquad -\infty < \rho \le 1$$

($r_\pm$ - радиусы внешнего и внутреннего горизонтов в единицах r_0) и подстановки

$$R(r) = A(\rho)F(\rho) \qquad A = (\rho-1)^{i\alpha}\rho^{i\beta}e^{i\gamma\rho}$$

получаем для F уравнение также в форме конфлюэнтного уравнения Гойна

$$\left\{\rho(\rho-1)\partial_\rho^2 + \left[c(\rho-1) + d\rho + e\rho(\rho-1)\right]\partial_\rho - a + b\rho\right\}F = 0$$

$$a \equiv -\lambda - r_+(\omega+k)^2 + r_- r_+ k^2 + 2Jmk - i\omega + i(r_+ - r_-)k$$

$$b \equiv -(r_+ - r_-)(\omega+k)^2 + i2(r_+ - r_-)k$$

$$c \equiv 1 + i2\beta$$

$$d \equiv 1 + i2\alpha$$

$$e \equiv i2\gamma$$

$$\alpha = \frac{Jm - \omega r_-}{r_+ - r_-} \qquad \beta = \frac{\omega r_+ - Jm}{r_+ - r_-} \qquad \gamma = (r_+ - r_-)k \qquad k \equiv \pm\sqrt{\omega^2 - \mu^2}$$

Формальное решение радиального уравнения

Формальное решение уравнения для функции F

$$F(\rho) = A_1 HeunC(a,b,c,d,e;\rho) +$$

$$+A_2\rho^{1-c} HeunC\left(a+(1-c)(e-d), b+(1-c)e, 2-c, d, e;\rho\right)$$

Отсюда формальное решения для R :

$$R(r) = A_1 R_1(r) + A_2 R_2(r)$$

$$R_1(r) \equiv e^{ik(r_+-r)}\left(\frac{r_- - r}{r_+ - r_-}\right)^{i\frac{Jm-\omega r_-}{r_+-r_-}}\left(\frac{r_+ - r}{r_+ - r_-}\right)^{i\frac{\omega r_+ - Jm}{r_+-r_-}} HeunC\left(a,b,c,d,e;\frac{r_+ - r}{r_+ - r_-}\right)$$

$$R_2(r) \equiv e^{ik(r_+-r)}\left(\frac{r_- - r}{r_+ - r_-}\right)^{i\frac{Jm-\omega r_-}{r_+-r_-}}\left(\frac{r_+ - r}{r_+ - r_-}\right)^{-i\frac{\omega r_+ - Jm}{r_+-r_-}} \times$$

$$\times HeunC\left(a+(1-c)(e-d), b+(1-c)e, 2-c, d, e;\frac{r_+ - r}{r_+ - r_-}\right)$$

Формальное решение радиального уравнения

Функция $HeunC(...;x)$ регулярна при $x=0$, следовательно $R(r)$ ограничена и бесконечно-быстро осциллирует на внешнем горизонте ($r=r_+$).

Поведение $R(r)$ в бесконечно удаленной точке, при разных значениях параметров может иметь различный характер.

Для дальнейших вычислений удобно вместо $R_1(r)$ и $R_2(r)$ взять пару комплексно-сопряженных решений

$$R_+=\left(\frac{r-r_-}{r_+-r_-}\right)^{-i\frac{\omega r_- - mJ}{(r_+-r_-)}}\left(\frac{r-r_+}{r_+-r_-}\right)^{i\frac{\omega r_+ - mJ}{(r_+-r_-)}} e^{ik(r_+-r)}HC(a,b,c,d,e;\rho)$$

$$R_-=\left(\frac{r-r_-}{r_+-r_-}\right)^{i\frac{\omega r_- - mJ}{(r_+-r_-)}}\left(\frac{r-r_+}{r_+-r_-}\right)^{-i\frac{\omega r_+ - mJ}{(r_+-r_-)}} e^{-ik(r_+-r)}HC(a^*,b^*,c^*,d^*,e^*;\rho)$$

Нетрудно показать, что эти решения являются независимыми.

Формальное решение для $R(r)$ в бесконечно-удаленной точке

Для выделения физических решений изучим поведение решений при $r \to \infty$

Ищем решение в форме Томе

$$e^{q\rho}\sum_{j=0}^{\infty} F_j \rho^{-j+p}$$

В результате, для радиальной функции получаем выражение

$$R_{(\infty)} = e^{-i\frac{\omega r_- - mJ}{(r_+ - r_-)}\ln(r-r_-)+\left[i\frac{\omega r_+ - mJ}{(r_+ - r_-)} - i\frac{(k+\omega)^2}{2k} - 1\right]\ln(r-r_+)+ik(r_+-r)} \sum_{j=0}^{\infty} F_j \left(\frac{r_+ - r}{r_+ - r_-}\right)^{-j}$$

$$R^*_{(\infty)} = e^{i\frac{\omega r_- - mJ}{(r_+ - r_-)}\ln(r-r_-)+\left[-i\frac{\omega r_+ - mJ}{(r_+ - r_-)} + i\frac{(k+\omega)^2}{2k} - 1\right]\ln(r-r_+)-ik(r_+-r)} \sum_{j=0}^{\infty} F^*_j \left(\frac{r_+ - r}{r_+ - r_-}\right)^{-j}$$

Таким образом, асимптотически (при $r \to \infty$) радиальная функция ведет себя как

$$B_+ r^{-1-i\frac{k^2+\omega^2}{2k}} e^{ik(r_+-r)} + B_- r^{-1+i\frac{k^2+\omega^2}{2k}} e^{-ik(r_+-r)}$$

Формальное решение для $R(r)$ в бесконечно-удаленной точке

1) При $\omega > \mu$ величина k вещественная, поэтому оба слагаемых являются осциллирующими, с амплитудой, спадающей как r^{-1}. В этом случае оба решения являются физически приемлемыми.

2) При $\omega < \mu$ величина k мнимая, поэтому одно из слагаемых является экспоненциально растущим, а другое – экспоненциально спадающим. В этом случае физически приемлемым является только одно из них.

Физические решения

Вронскиан двух независимых решений уравнения для R

$$W(r)=W_0 e^{-\ln\Delta}=\frac{1}{(r-r_-)(r-r_+)}W_0$$

Его асимптотическое поведение при $r\to\infty$ и $r\to r_+$

$$W(r\to\infty)\sim\frac{1}{r^2}W_0 \qquad W(r\to r_+)\sim\frac{1}{(r_+-r_-)(r-r_+)}W_0$$

Для решений, полученных вблизи горизонта и выраженных через функции $HeunC$

$$W(R_+,R_-;r\to 0)\sim i\frac{2\omega r_+-mJ}{(r_+-r_-)(r-r_+)}$$

Для произвольной линейной комбинации $B_+R_{(\infty)}+B_-R_{(\infty)}{}^*$

$$W\left(B_+R_{(\infty)}+B_-R_{(\infty)}{}^*,B_+{}^*R_{(\infty)}{}^*+B_-{}^*R_{(\infty)};r\to\infty\right)=i\left(|B_-|^2-|B_+|^2\right)\frac{2k}{r^2}$$

Из сравнения этих выражений получаем связь

$$i(2\omega r_+-mJ)=W_0=i2k\left(|B_-|^2-|B_+|^2\right)$$

Физические решения

Общее решение

$$R(a,b,c,d,e;r) \equiv A_+ e^{-i\frac{\omega(r_- - Q^2) - mJ}{(r_+ - r_-)}\ln(r-r_-) + i\frac{\omega(r_+ - Q^2) - mJ}{(r_+ - r_-)}\ln(r-r_+) + ik(r_+ - r)} HC\left(a,b,c,d,e;\frac{r_+ - r}{r_+ - r_-}\right) +$$

$$+A_- e^{i\frac{\omega(r_- - Q^2) - mJ}{(r_+ - r_-)}\ln(r-r_-) - i\frac{\omega(r_+ - Q^2) - mJ}{(r_+ - r_-)}\ln(r-r_+) - ik(r_+ - r)} HC\left(a^*,b^*,c^*,d^*,e^*;\frac{r_+ - r}{r_+ - r_-}\right)$$

Независимые решения ортонормированы относительно скалярного произведения

$$I = \int_{r_+}^{\infty} \frac{1}{2}\left\{R^*(...;r)R(...';r) + R(...;r)R^*(...';r)\right\}\frac{r^4}{(r-r_-)(r-r_+)}dr$$

Поскольку спектр непрерывный, нормировка должна быть сделана на дельта-функцию.

$$I = \frac{1}{2}\int_{r_+}^{r_1} \left\{R^*(...;r)R(...';r) + R(...;r)R^*(...';r)\right\}\frac{r^4}{(r-r_-)(r-r_+)}dr +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{r_2}^{\infty} \left\{R^*(...;r)R(...';r) + R(...;r)R^*(...';r)\right\} r^2 dr + fin$$

Физические решения

Первый интеграл

$$\frac{1}{2}\int_{r_+}^{r_1}\left\{R^*(\ldots;r)R(\ldots';r)+R(\ldots;r)R^*(\ldots';r)\right\}\frac{r^4}{(r-r_-)(r-r_+)}dr =$$

$$= \pi r_+^2\left|A_+^*A_+' + A_-^*A_-'\right|\delta(\Delta\omega) + fin$$

Второй интеграл при вещественном k

$$\frac{1}{2}\int_{r_2}^{\infty}\left\{R^*(\ldots;r)R(\ldots';r)+R(\ldots;r)R^*(\ldots';r)\right\}r^2dr =$$

$$= 2\pi\left(A_+^*A_+' + A_-^*A_-'\right)|B|^2\,\delta(|\Delta k|) + fin$$

В итоге, при вещественном k

$$I = 2\pi\begin{pmatrix}A_+^* & A_-^*\end{pmatrix}\left\{\frac{r_+^2}{2}\frac{\omega}{|k|}+|B|^2\right\}\begin{pmatrix}A_+'\\ A_-'\end{pmatrix}\delta(|\Delta k|) + fin$$

Физические решения

В результате, при вещественном k есть два различных решения

первое:

$$\begin{pmatrix} A_+ \\ A_- \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\left\{\dfrac{r_+^2}{2}\dfrac{\omega}{|k|}+|B|^2\right\}}} e^{i\sigma} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

второе:

$$\begin{pmatrix} A'_+ \\ A'_- \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\left\{\dfrac{r_+^2}{2}\dfrac{\omega}{|k|}+|B|^2\right\}}} e^{i\sigma'} \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

Где θ, σ и σ' - произвольные углы, а

$$|B|^2 = \frac{2\omega\left(r_+ - Q^2\right) - mJ}{2k}$$

Физические решения

При мнимом k параметры соотношение параметров A_+ и A_- должно быть таким, чтобы подавлялось асимптотически растущее слагаемое.

$$R(a,b,c,d,e;r) \sim A_+\left\{B_+ r^{-1-i\frac{k^2+\omega^2}{2k}} e^{ik(r_+-r)} + B_- r^{-1+i\frac{k^2+\omega^2}{2k}} e^{-ik(r_+-r)}\right\} +$$

$$+A_-\left\{B_+^* r^{-1-i\frac{k^2+\omega^2}{2k}} e^{ik(r_+-r)} + B_-^* r^{-1+i\frac{k^2+\omega^2}{2k}} e^{-ik(r_+-r)}\right\} =$$

$$=\left(A_+B_+ + A_-B_-\right) r^{-1-i\frac{k^2+\omega^2}{2k}} e^{ik(r_+-r)} + \left(A_+B_+^* + A_-B_-^*\right) r^{-1+i\frac{k^2+\omega^2}{2k}} e^{-ik(r_+-r)}$$

Т.е.

$$A_+B_+ + A_-B_- = 0 \qquad k = i\sqrt{\mu^2-\omega^2}$$

при

$$A_+B_+^* + A_-B_-^* = 0 \qquad k = -i\sqrt{\mu^2-\omega^2}$$

что эквивалентно

$$A_- = -AB_+, \quad A_+ = -AB_- \qquad k = i\sqrt{\mu^2-\omega^2}$$

$$A_- = -AB_+^*, \quad A_+ = -AB_-^* \qquad k = -i\sqrt{\mu^2-\omega^2}$$

Физические решения

Второй интеграл для экспоненциально спадающего решения дает конечный вклад, поэтому при нормировке на дельта-функции имеет значение только первый. Поэтому при мнимом k

$$I = 2\pi r_+^2 \frac{\omega}{|k|} |A|^2 \delta\left(\left|\Delta k\right|\right) + fin$$

Значит

$$A = \frac{1}{\sqrt{2\pi r_+^2 \frac{\omega}{|k|}}} e^{i\sigma}$$

Заключение

1. Получены точные решения для скалярного поля в метрике вращающейся черной дыры. Зависимости от полярного угла и от радиальной координаты выражаются через конфлюэнтные функции Гойна.

2. Построены физические решения, которые во всем диапазоне энергий нормированы на дельта-функцию от модуля импульса.

3. Спектр решений непрерывный во всем диапазоне энергий, в том числе при энергиях меньше массы поля.

4. При энергиях больших массы поля имеет место двукратное вырождение состояний.

Спасибо за внимание!

Доклад основан на результатах исследований в рамках научной программы Национального центра физики и математики, направление №5 “Физика частиц и космология”.