FeynGrav
и пертурбативная квантовая гравитация

Борис Латош

Лаборатория теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова
Объединенный институт ядерных исследований

Мотивация

Пертурбативная квантовая гравитация это простейшая квантовая модель гравитации

Пертурбативное разложение

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa\, h_{\mu\nu}$$

- Стандартная квантовая теория поля
- Плоский фон обеспечивает симметрию Пуанкаре
- Гравитоны это частицы с $m = 0$, $s = 2$
- Теория эффективная и неперенормируемая

Мотивация

Генерирующий функционал

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z} &= \int \mathcal{D}[g] \exp\left[i\,\mathcal{A}[g]\right] \\
&= \int \mathcal{D}[h] \exp\left[i\,\mathcal{A}[\eta + \kappa\, h]\right] \\
&= \int \mathcal{D}[h] \exp\Bigg[-\frac{i}{2} h^{\mu\nu} \mathcal{O}_{\mu\nu\alpha\beta} \Box h^{\alpha\beta} \\
&\quad + i\,\kappa\, V^{(3)}_{\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2\mu_3\nu_3} h^{\mu_1\nu_1} h^{\mu_2\nu_2} h^{\mu_3\nu_3} \\
&\quad + i\,\kappa^2\, V^{(4)}_{\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2\mu_3\nu_3\mu_4\nu_4} h^{\mu_1\nu_1} h^{\mu_2\nu_2} h^{\mu_3\nu_3} h^{\mu_4\nu_4} + \mathcal{O}\left(\kappa^3\right) \Bigg]
\end{aligned}
$$

Мотивация

Правила Фейнмана сложны!

Вершина для трёх гравитонов содержит 171 член

Вершина для четырёх гравитонов содержит 2850 членов

DeWitt, Phys.Rev. 162 (1967) 1239

Sannan, Phys.Rev.D 34 (1986) 1749

Мотивация

$$
\begin{aligned}
V_{\mu\alpha,\nu\beta,\sigma\gamma}(k_1,k_2,k_3) = \mathrm{sym}\Big[& -\frac{1}{2}P_3(k_1\cdot k_2\,\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}\eta_{\sigma\gamma}) - \frac{1}{2}P_6(k_{1\nu}k_{1\beta}\eta_{\mu\alpha}\eta_{\sigma\gamma}) + \frac{1}{2}P_3(k_1\cdot k_2\,\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}\eta_{\sigma\gamma}) \\
& + P_6(k_1\cdot k_2\,\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\sigma}\eta_{\beta\gamma}) + 2\,P_3(k_{1\nu}k_{1\gamma}\eta_{\mu\alpha}\eta_{\beta\sigma}) - P_3(k_{1\beta}k_{2\mu}\eta_{\alpha\nu}\eta_{\sigma\gamma}) \\
& + P_3(k_{1\sigma}k_{2\gamma}\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}) + P_6(k_{1\sigma}k_{1\gamma}\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}) + 2\,P_6(k_{1\nu}k_{2\gamma}\eta_{\beta\mu}\eta_{\alpha\sigma}) \\
& + 2\,P_3(k_{1\nu}k_{2\mu}\eta_{\beta\sigma}\eta_{\gamma\alpha}) - 2\,P_3(k_1\cdot k_2\,\eta_{\alpha\nu}\eta_{\beta\sigma}\eta_{\gamma\mu})\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V_{\mu\alpha,\nu\beta,\sigma\gamma,\rho\lambda}(k_1,k_2,k_3,k_4) = \mathrm{sym}\Big[& -\frac{1}{4}P_6(k_1\cdot k_2\,\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}\eta_{\sigma\gamma}\eta_{\rho\lambda}) - \frac{1}{4}P_{12}(k_{1\nu}k_{1\beta}\eta_{\mu\alpha}\eta_{\sigma\gamma}\eta_{\rho\lambda}) - \frac{1}{2}P_6(k_{1\nu}k_{2\mu}\eta_{\alpha\beta}\eta_{\sigma\gamma}\eta_{\rho\lambda}) \\
& + \frac{1}{4}P_6(k_1\cdot k_2\,\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}\eta_{\sigma\gamma}\eta_{\rho\lambda}) + \frac{1}{2}P_6(k_1\cdot k_2\,\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}\eta_{\sigma\rho}\eta_{\gamma\lambda}) + \frac{1}{2}P_{12}(k_{1\nu}k_{1\beta}\eta_{\mu\alpha}\eta_{\sigma\rho}\eta_{\gamma\lambda}) \\
& + P_6(k_{1\nu}k_{2\mu}\eta_{\alpha\beta}\eta_{\sigma\rho}\eta_{\gamma\lambda}) - \frac{1}{2}P_6(k_1\cdot k_2\,\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}\eta_{\sigma\rho}\eta_{\gamma\lambda}) + \frac{1}{2}P_{24}(k_1\cdot k_2\,\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\sigma}\eta_{\beta\gamma}\eta_{\rho\lambda}) \\
& + \frac{1}{2}P_{24}(k_{1\nu}k_{1\beta}\eta_{\mu\sigma}\eta_{\alpha\gamma}\eta_{\rho\lambda}) + \frac{1}{2}P_{12}(k_{1\sigma}k_{2\gamma}\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}\eta_{\rho\lambda}) + P_{24}(k_{1\nu}k_{2\sigma}\eta_{\beta\mu}\eta_{\alpha\gamma}\eta_{\rho\lambda}) \\
& - P_{12}(k_1\cdot k_2\,\eta_{\alpha\nu}\eta_{\beta\sigma}\eta_{\gamma\mu}\eta_{\rho\lambda}) + P_{12}(k_{1\nu}k_{2\mu}\eta_{\beta\sigma}\eta_{\gamma\alpha}\eta_{\rho\lambda}) + P_{12}(k_{1\nu}k_{1\sigma}\eta_{\beta\gamma}\eta_{\mu\alpha}\eta_{\rho\lambda}) \\
& - P_{24}(k_1\cdot k_2\,\eta_{\mu\alpha}\eta_{\beta\sigma}\eta_{\gamma\rho}\eta_{\lambda\nu}) - 2\,P_{12}(k_{1\nu}k_{1\beta}\eta_{\alpha\sigma}\eta_{\gamma\rho}\eta_{\lambda\mu}) - 2\,P_{12}(k_{1\sigma}k_{2\gamma}\eta_{\alpha\rho}\eta_{\lambda\nu}\eta_{\beta\mu}) \\
& - 2\,P_{24}(k_{1\nu}k_{2\sigma}\eta_{\beta\rho}\eta_{\lambda\mu}\eta_{\alpha\gamma}) - 2\,P_{12}(k_{1\sigma}k_{2\rho}\eta_{\gamma\nu}\eta_{\beta\mu}\eta_{\alpha\lambda}) + 2\,P_6(k_1\cdot k_2\,\eta_{\alpha\sigma}\eta_{\gamma\nu}\eta_{\beta\rho}\eta_{\lambda\mu}) \\
& - 2\,P_{12}(k_{1\nu}k_{1\sigma}\eta_{\mu\alpha}\eta_{\beta\rho}\eta_{\lambda\gamma}) - P_{12}(k_1\cdot k_2\,\eta_{\mu\sigma}\eta_{\alpha\gamma}\eta_{\nu\rho}\eta_{\beta\lambda}) - 2\,P_{12}(k_{1\nu}k_{1\sigma}\eta_{\beta\gamma}\eta_{\mu\rho}\eta_{\alpha\lambda}) \\
& - P_{12}(k_{1\sigma}k_{2\rho}\eta_{\gamma\lambda}\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}) - 2\,P_{24}(k_{1\nu}k_{2\sigma}\eta_{\beta\mu}\eta_{\alpha\rho}\eta_{\lambda\gamma}) - 2\,P_{12}(k_{1\nu}k_{2\mu}\eta_{\beta\sigma}\eta_{\gamma\rho}\eta_{\lambda\alpha}) \\
& + 4P_6(k_1\cdot k_2\,\eta_{\alpha\nu}\eta_{\beta\sigma}\eta_{\gamma\rho}\eta_{\lambda\mu})\Big]
\end{aligned}
$$

Sannan, Phys.Rev.D 34 (1986) 1749

Цели

- Разработать формализм для эффективного вычисления правил взаимодействия
- Получить правила для
    - Теории относительности
    - Теории Хорндески
    - Электродинамики
    - Модели SU(N) Янга-Миллса
- Разработать вычислительный пакет

Latosh, Class.Quant.Grav. 39 (2022) 16, 165006
Comput.Phys.Commun. 292 (2023) 108871
Symmetry 16 (2024) 117
Comput.Phys.Commun. 310 (2025) 109508

Правила взаимодействия

Конечные и бесконечные разложения

$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa\, h_{\mu\nu}$	конечное разложение
$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \kappa\, h^{\mu\nu} + \cdots$	бесконечное разложение
$\partial_\alpha g_{\mu\nu} = \kappa\, \partial_\alpha h_{\mu\nu}$	конечное разложение
$\partial_\alpha g^{\mu\nu} = -g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \partial_\alpha g_{\rho\sigma}$	бесконечное разложение

Производные и бесконечные разложения разделяются

Пример: тензор Римана

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = \partial_\mu \Gamma_{\alpha\nu\beta} - \partial_\nu \Gamma_{\alpha\mu\beta} + g^{\rho\sigma} \left\{ \Gamma_{\rho\nu\alpha} \Gamma_{\sigma\mu\beta} - \Gamma_{\rho\mu\alpha} \Gamma_{\sigma\nu\beta} \right\}$$

$$\Gamma_{\alpha\mu\nu} = \frac{\kappa}{2} \left[\partial_\mu h_{\nu\alpha} + \partial_\nu h_{\mu\alpha} - \partial_\alpha h_{\mu\nu} \right]$$

Правила взаимодействия

Факторизация

$$\mathcal{A} = \int d^4x \sqrt{-g}\,\mathcal{L}\left[g_{\mu\nu}, \Gamma_{\alpha\mu\nu}, g^{\mu\nu}, \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}, \Psi\right]$$

$$= \int d^4x\, \underbrace{\sqrt{-g}\,\mathcal{L}_{\text{infinite}}\left[g^{\mu\nu}\right]}_{\text{бесконечное разложение}}\, \underbrace{\mathcal{L}_{\text{finite}}\left[g_{\mu\nu}, \Gamma_{\alpha\mu\nu}, \Psi\right]}_{\text{конечное разложение}}$$

- Конечное разложение вычисляется явно
- Бесконечное разложение вычисляется при помощи компьютера

Правила взаимодействия

Обозначения

$$X \overset{\text{note}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \kappa^n \left(X\right)^{\rho_1\sigma_1\cdots\rho_n\sigma_n} \, h_{\rho_1\sigma_1} \cdots h_{\rho_n\sigma_n}$$

Пример

$$g^{\mu\nu} = \left(g^{\mu\nu}\right) + \kappa \left(g^{\mu\nu}\right)^{\rho_1\sigma_1} h_{\rho_1\sigma_1} + \kappa^2 \left(g^{\mu\nu}\right)^{\rho_1\sigma_1\rho_2\sigma_2} h_{\rho_1\sigma_1} h_{\rho_2\sigma_2} + \cdots$$

Правила взаимодействия

Обратная метрика

$$
\begin{aligned}
g^{\mu\nu} &= \eta^{\mu\nu} + \sum_{n=1}^{\infty} (-\kappa)^n \, (h^n)^{\mu\nu} \\
&\overset{\text{note}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \kappa^n \, (g^{\mu\nu})^{\rho_1\sigma_1\cdots\rho_n\sigma_n} \, h_{\rho_1\sigma_1} \cdots h_{\rho_n\sigma_n} \\
(h^n)^{\mu\nu} &\overset{\text{note}}{=} h^{\mu}{}_{\sigma_1} h^{\sigma_1}{}_{\sigma_2} \cdots h^{\sigma_{n-1}\nu} \\
&= h^{\rho_1\sigma_1} h^{\rho_2\sigma_2} \dots h^{\rho_n\sigma_n} \left[\delta^{\mu}{}_{\rho_1} \eta_{\sigma_1\rho_2} \cdots \eta_{\sigma_{n-1}\rho_n} \delta_{\sigma_n}{}^{\nu}\right]
\end{aligned}
$$

Простой I-тензор n-ого порядка

$$
I_{(n)}^{\rho_1\sigma_1\cdots\rho_n\sigma_n} \overset{\text{def}}{=} \eta^{\sigma_1\rho_2} \eta^{\sigma_2\rho_3} \dots \eta^{\sigma_n\rho_1}
$$

Структура обратной метрики определена

$$g^{\mu\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} (-\kappa)^n I_{(1+n)}^{\mu\nu\rho_1\sigma_1\cdots\rho_n\sigma_n} h_{\rho_1\sigma_1}\cdots h_{\rho_n\sigma_n}$$

$$(g^{\mu\nu}) = I_{(1)}^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$$

$$(g^{\mu\nu})^{\rho\sigma} = -I_{(2)}^{\mu\nu\rho\sigma} = -\eta^{\nu\rho}\eta^{\sigma\mu}$$

$$(g^{\mu\nu})^{\rho_1\sigma_1\rho_2\sigma_2} = I_{(3)}^{\mu\nu\rho_1\sigma_1\rho_2\sigma_2} = \eta^{\nu\rho_1}\eta^{\sigma_1\rho_2}\eta^{\sigma_2\mu}$$

Простой C-тензор n-ного порядка и разложение

$$\sqrt{-g} = \sum_{n=0}^{\infty} \kappa^n C_{(n)}^{\rho_1\sigma_1\cdots\rho_n\sigma_n} h_{\rho_1\sigma_1}\cdots h_{\rho_n\sigma_n}$$

Явная формула

$$\sqrt{-g} = \sum_{n=0}^{\infty} (-\kappa)^n \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m!}\left(-\frac{1}{2}\right)^m \left[\sum_{k_1+\cdots+k_m=n} \frac{\operatorname{tr} h^{k_1}\cdots \operatorname{tr} h^{k_m}}{k_1\cdots k_m}\right]$$

Правила взаимодействия

Простой C-тензор определён рекуррентно

$$C_{(n)}^{\rho_1\sigma_1\cdots\rho_n\sigma_n} = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} I_{(k)}^{\rho_1\sigma_1\cdots\rho_k\sigma_k}\, C_{(n-k)}^{\rho_{k+1}\sigma_{k+1}\cdots\rho_n\sigma_n}$$

Соотношение следует из формулы Якоби

$$\frac{d}{dz}\sqrt{-\det\left[\eta_{\mu\nu} + z\,\kappa\, h_{\mu\nu}\right]}\Bigg|_{z=1} = \frac{\kappa}{2}\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\, h_{\mu\nu}$$

Правила взаимодействия

Элементарный объём

Структура элементарного объёма определена

$$\sqrt{-g} = \sum_{n=0}^{\infty} \kappa^n \left(\sqrt{-g}\right)^{\rho_1\sigma_1\cdots\rho_n\sigma_n} h_{\rho_1\sigma_1}\cdots h_{\rho_n\sigma_n}$$

$$\left(\sqrt{-g}\right) = C_{(0)} = 1$$

$$\left(\sqrt{-g}\right)^{\rho_1\sigma_1} = C_{(1)}^{\rho_1\sigma_1} = \frac{1}{2}\eta^{\rho_1\sigma_1}$$

$$\left(\sqrt{-g}\right)^{\rho_1\sigma_1\rho_2\sigma_2} = C_{(2)}^{\rho_1\sigma_1\rho_2\sigma_2} = \frac{1}{8}\eta^{\rho_1\sigma_1}\,\eta^{\rho_2\sigma_2} - \frac{1}{4}\eta^{\sigma_1\rho_2}\,\eta^{\sigma_2\rho_1}$$

Тетрады полностью определены

$$\mathfrak{e}^{\mu}{}_{\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} \kappa^n \binom{\frac{1}{2}}{n} I_{\mu}{}^{\nu\rho_1\sigma_1\cdots\rho_n\sigma_n} h_{\rho_1\sigma_1} \cdots h_{\rho_n\sigma_n}$$

$$\mathfrak{e}_{\mu}{}^{\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} \kappa^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} I_{\mu}{}^{\nu\rho_1\sigma_1\cdots\rho_n\sigma_n} h_{\rho_1\sigma_1} \cdots h_{\rho_n\sigma_n}$$

$$\binom{a}{b} = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(b+1)\Gamma(a-b+1)}$$

Prinz, Class.Quant.Grav. 38 (2021) 21, 215003

Правила взаимодействия

Все факторы с бесконечными расположениям определены и вычислимы во всех порядках теории возмущений

$$\sqrt{-g}, \quad \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}, \quad \sqrt{-g}\, \mathfrak{e}_{\mu}{}^{\nu}, \quad \sqrt{-g}\, \mathfrak{e}^{\mu}{}_{\nu}$$

$$\sqrt{-g}\, g^{\mu_1\nu_1} g^{\mu_2\nu_2}, \quad \sqrt{-g}\, g^{\mu_1\nu_1} g^{\mu_2\nu_2} g^{\mu_3\nu_3}, \ldots$$

Правила взаимодействия

Общая теория относительности

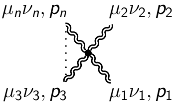
$$\mathcal{A}_{\mathrm{H+gf}} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{2}{\kappa^2} R + \frac{\epsilon}{2\,\kappa^2} g_{\mu\nu} \left(g^{\alpha\beta} \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \right) \left(g^{\rho\sigma} \Gamma^{\nu}_{\rho\sigma} \right) \right]$$

$$= \int d^4x \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} g^{\rho\sigma} \left(-\frac{2}{\kappa^2} \right) \left[\Gamma_{\alpha\mu\rho} \Gamma_{\sigma\nu\beta} - \Gamma_{\alpha\mu\nu} \Gamma_{\rho\beta\sigma} - \frac{\epsilon}{4} \Gamma_{\mu\alpha\beta} \Gamma_{\nu\rho\sigma} \right]$$

Духи Фаддеева-Попова

$$\mathcal{A}_{\mathrm{ghost}} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \nabla_\alpha \overline{c}_\mu \nabla_\beta c_\nu - 2\, \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \overline{c}_\mu \nabla^\alpha c^\beta + R_{\mu\nu} \overline{c}^\mu c^\nu \right]$$

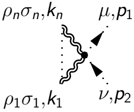
Правила взаимодействия



$$= i\, 2\, \kappa^{n-2} \left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} g^{\rho\sigma}\right)^{\mu_3\nu_3\cdots\mu_n\nu_n} (p_1)_{\lambda_1} (p_2)_{\lambda_2}$$

$$\times \left[(\Gamma_{\alpha\mu\rho})^{\lambda_1\mu_1\nu_1} (\Gamma_{\sigma\nu\beta})^{\lambda_2\mu_2\nu_2} - (\Gamma_{\alpha\mu\nu})^{\lambda_1\mu_1\nu_1} (\Gamma_{\rho\beta\sigma})^{\lambda_2\mu_2\nu_2} - \frac{\epsilon}{4} (\Gamma_{\mu\alpha\beta})^{\lambda_1\mu_1\nu_1} (\Gamma_{\nu\rho\sigma})^{\lambda_2\mu_2\nu_2} \right]$$

$+$ permutations



$$= i\, \kappa^n \Bigg[\left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta}\right)^{\rho_1\sigma_1\cdots\rho_n\sigma_n} (p_1)_\alpha (p_2)_\beta - \left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} g^{\rho\sigma}\right)^{\rho_2\sigma_2\cdots\rho_n\sigma_n} (k_1)_\lambda$$

$$\times \left[(p_1)_\sigma (\Gamma_{\beta\rho\alpha})^{\lambda\rho_1\sigma_1} - (p_2)_\sigma (\Gamma_{\alpha\rho\beta})^{\lambda\rho_1\sigma_1} + (k_1)_\rho (\Gamma_{\sigma\alpha\beta})^{\lambda\rho_1\sigma_1} - (k_1)_\alpha (\Gamma_{\rho\beta\sigma})^{\lambda\rho_1\sigma_1} \right]$$

$$- \left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} g^{\rho\sigma} g^{\lambda\tau}\right)^{\rho_3\sigma_3\cdots\rho_n\sigma_n} (k_1)_{\lambda_1} (k_2)_{\lambda_2}$$

$$\times \left[(\Gamma_{\rho\alpha\lambda})^{\lambda_1\rho_1\sigma_1} (\Gamma_{\sigma\beta\tau})^{\lambda_2\rho_2\sigma_2} - (\Gamma_{\rho\alpha\beta})^{\lambda_1\rho_1\sigma_1} (\Gamma_{\sigma\lambda\tau})^{\lambda_2\rho_2\sigma_2} + (\Gamma_{\alpha\rho\lambda})^{\lambda_1\rho_1\sigma_1} (\Gamma_{\beta\sigma\tau})^{\lambda_2\rho_2\sigma_2} \right] \Bigg]$$

$+$ permutations

$$\Gamma_{\mu\alpha\beta} = \kappa\, (-i)\, p_\lambda\, (\Gamma_{\mu\alpha\beta})^{\lambda\rho\sigma}\, h_{\rho\sigma}(p); \qquad (\Gamma_{\mu\alpha\beta})^{\lambda\rho\sigma} = \frac{1}{2} \left[\delta^\lambda_\alpha I_{\beta\mu}{}^{\rho\sigma} + \delta^\lambda_\beta I_{\alpha\mu}{}^{\rho\sigma} - \delta^\lambda_\mu I_{\alpha\beta}{}^{\rho\sigma} \right]$$

Правила взаимодействия

Теория Хорндески

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_2 =& G_2(\phi, X) \\
\mathcal{L}_3 =& G_3(\phi, X)\Box\phi \\
\mathcal{L}_4 =& G_4(\phi, X)R + G_{4,X}\left[(\Box\phi)^2 - (\nabla_{\mu\nu}\phi)^2\right] \\
\mathcal{L}_5 =& G_5(\phi, X)G^{\mu\nu}\nabla_{\mu\nu}\phi \\
& - \frac{1}{3!}G_{5,X}\left[(\Box\phi)^3 - 3\Box\phi\,(\nabla_{\mu\nu}\phi)^2 + 2\,(\nabla_{\mu\nu}\phi)^3\right]
\end{aligned}
$$

$$
X \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi
$$

Horndeski, Int.J.Theor.Phys. 10 (1974) 363
Kobayashi et al, Prog.Theor.Phys. 126 (2011) 511

Правила взаимодействия

$$\mathcal{L}_2 \to \int d^4x\sqrt{-g}\,\lambda_{(a,b)}\phi^a X^b$$

$$\mathcal{L}_3 \to \int d^4x\sqrt{-g}\,\Theta_{(a,b)}\phi^a X^b \Box\phi$$

$$\mathcal{L}_4 \to \int d^4x\sqrt{-g}\,\Upsilon_{(a,b)}\left[\phi^a X^b R - b\,\phi^a X^{b-1}\left((\Box\phi)^2 - (\nabla_{\mu\nu}\phi)^2\right)\right]$$

$$\mathcal{L}_5 \to \int d^4x\sqrt{-g}\,\Psi_{(a,b)}\Big[\phi^a X^b G^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi + \frac{b}{3!}\phi^a X^{b-1}\left[(\Box\phi)^3 - 3\Box\phi(\nabla_{\mu\nu}\phi)^2 + 2(\nabla_{\mu\nu}\phi)^3\right]\Big]$$

Правила взаимодействия

Пример: класс G_2

$$\int d^4x \sqrt{-g}\,\lambda_{(a,b)}\,\phi^a\,X^b$$

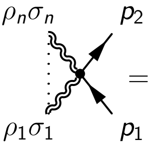
$$= \int d^4x\, \underbrace{\sqrt{-g}\,g^{\mu_1\nu_1}\cdots g^{\mu_b\nu_b}}\,\lambda_{(a,b)}\phi^a\,\underbrace{\partial_{\mu_1}\phi\;\partial_{\nu_1}\phi\cdots\partial_{\mu_p}\phi\;\partial_{\nu_b}\phi}_{2b\text{ fields}}$$

$$= i\,\kappa^n(-1)^b\lambda_{(a,b)}\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu_1\nu_1}\cdots g^{\mu_b\nu_b}\right)^{\rho_1\sigma_1\cdots\rho_n\sigma_n}(p_1)_{\mu_1}(p_2)_{\nu_1}\cdots(p_{2b-1})_{\mu_b}(p_{2b})_{\nu_b}$$

$$+ \text{ permutations}$$

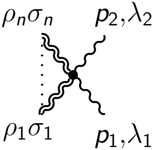
Правила взаимодействия

Дираковские фермионы



$$= i\,\kappa^n \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{-g}\, \mathfrak{e}_m{}^{\mu} \right)^{\rho_1\sigma_1\cdots\rho_n\sigma_n} (p_1 - p_2)_\mu \gamma^m - \left(\sqrt{-g} \right)^{\rho_1\sigma_1\cdots\rho_n\sigma_n} m \right]$$

Поле Прока



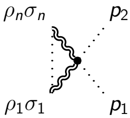
$$= i\kappa^n \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \right)^{\rho_1\sigma_1\cdots\rho_n\sigma_n} (p_1)_{\mu_1} (p_2)_{\mu_2} (F_{\mu\nu})^{\mu_1\lambda_1} (F_{\alpha\beta})^{\mu_2\lambda_2} \right.$$

$$\left. + \, m^2 \left(\sqrt{-g}\, g^{\lambda_1\lambda_2} \right)^{\rho_1\sigma_1\cdots\rho_n\sigma_n} \right]$$

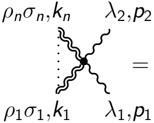
$$F_{\mu\nu} = -i\, p_\sigma \left(F_{\mu\nu} \right)^{\sigma\lambda} A_\lambda(p); \qquad \left(F_{\mu\nu} \right)^{\sigma\lambda} \overset{\text{def}}{=} \delta^\sigma_\mu\, \delta^\lambda_\nu - \delta^\sigma_\nu\, \delta^\lambda_\mu$$

Правила взаимодействия

Векторное поле



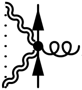
$$= i\,\kappa^n\,\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\right)^{\rho_1\sigma_1\cdots\rho_n\sigma_n}\,I_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta}(p_1)_\alpha(p_2)_\beta$$



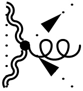
$$
\begin{aligned}
= i\,\kappa^n\Bigg[& \frac{1}{2}\left(\sqrt{-g}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\right)^{\rho_1\sigma_1\cdots\rho_n\sigma_n}(p_1)_{\sigma_1}(p_2)_{\sigma_2}(F_{\mu\nu})^{\sigma_1\lambda_1}(F_{\alpha\beta})^{\sigma_2\lambda_2} \\
& - \epsilon\,\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu_1\lambda_1}g^{\mu_2\lambda_2}\right)^{\rho_1\sigma_1\cdots\rho_n\sigma_n}(p_1)_{\mu_1}(p_2)_{\mu_2} \\
& + \epsilon\left\{\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}g^{\mu_1\lambda_1}g^{\mu_2\lambda_2}\right)^{\rho_2\sigma_2\cdots\rho_n\sigma_n}(k_1)_\sigma\left[(p_2)_{\mu_2}(\Gamma_{\mu_1\mu\nu})^{\sigma\rho_1\sigma_1}+(p_1)_{\mu_1}(\Gamma_{\mu_2\mu\nu})^{\sigma\rho_1\sigma_1}\right]+\cdots\right\} \\
& - \frac{\epsilon}{2}\Big\{\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}g^{\mu_1\lambda_1}g^{\mu_2\lambda_2}\right)^{\rho_3\sigma_3\cdots\rho_n\sigma_n}\Big[(k_1)_{\tau_1}(k_2)_{\tau_2}(\Gamma_{\mu_1\mu\nu})^{\tau_1\rho_1\sigma_1}(\Gamma_{\mu_2\alpha\beta})^{\tau_2\rho_2\sigma_2} \\
& \qquad + (k_1)_{\tau_2}(k_2)_{\tau_1}(\Gamma_{\mu_2\mu\nu})^{\tau_1\rho_2\sigma_2}(\Gamma_{\mu_1\alpha\beta})^{\tau_2\rho_1\sigma_1}\Big]+\cdots\Big\}\Bigg]
\end{aligned}
$$

$$\Gamma_{\mu\alpha\beta} = \kappa\,(-i)\,p_\lambda\,(\Gamma_{\mu\alpha\beta})^{\lambda\rho\sigma}\,h_{\rho\sigma}(p);\quad (\Gamma_{\mu\alpha\beta})^{\lambda\rho\sigma} = \frac{1}{2}\left[\delta^\lambda_\alpha I_{\beta\mu}{}^{\rho\sigma} + \delta^\lambda_\beta I_{\alpha\mu}{}^{\rho\sigma} - \delta^\lambda_\mu I_{\alpha\beta}{}^{\rho\sigma}\right]$$

Теория $SU(N)$ Янга-Миллса



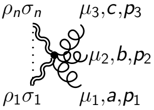
$$= i\, \kappa^n\, g_s\, \gamma^m\, T^a\, \left(\sqrt{-g}\, \mathfrak{e}_m{}^{\mu}\right)^{\rho_1\sigma_1\cdots\rho_n\sigma_n}$$



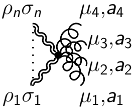
$$= -\kappa^n\, g_s\, f^{abc}\, (p_1)_\nu\, \left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\right)^{\rho_1\sigma_1\cdots\rho_n\sigma_n}$$

Правила взаимодействия

Теория $SU(N)$ Янга-Миллса



$$= \kappa^n g_s f^{abc} \Big[(p_1 - p_2)_\sigma \left(\sqrt{-g}\, g^{\mu_1\mu_2} g^{\mu_3\sigma}\right)^{\rho_1\sigma_1\cdots\rho_n\sigma_n} + (p_3 - p_1)_\sigma \left(\sqrt{-g}\, g^{\mu_1\mu_3} g^{\mu_2\sigma}\right)^{\rho_1\sigma_1\cdots\rho_n\sigma_n} + (p_2 - p_3)_\sigma \left(\sqrt{-g}\, g^{\mu_2\mu_3} g^{\mu_1\sigma}\right)^{\rho_1\sigma_1\cdots\rho_n\sigma_n} \Big]$$



$$= -i\, g_s^2 \kappa^n \Big[f^{a_1a_4s} f^{a_2a_3s} \left(\left(\sqrt{-g}\, g^{\mu_1\mu_2} g^{\mu_3\mu_4}\right)^{\rho_1\cdots\sigma_n} - \left(\sqrt{-g}\, g^{\mu_1\mu_3} g^{\mu_2\mu_4}\right)\right)^{\rho_1\cdots\sigma_n}$$
$$+ f^{a_1a_3s} f^{a_2a_4s} \left(\left(\sqrt{-g}\, g^{\mu_1\mu_2} g^{\mu_3\mu_4}\right)^{\rho_1\cdots\sigma_n} - \left(\sqrt{-g}\, g^{\mu_1\mu_4} g^{\mu_2\mu_3}\right)\right)^{\rho_1\cdots\sigma_n}$$
$$+ f^{a_1a_2s} f^{a_3a_4s} \left(\left(\sqrt{-g}\, g^{\mu_1\mu_3} g^{\mu_2\mu_4}\right)^{\rho_1\cdots\sigma_n} - \left(\sqrt{-g}\, g^{\mu_1\mu_4} g^{\mu_2\mu_3}\right)\right)^{\rho_1\cdots\sigma_n} \Big]$$

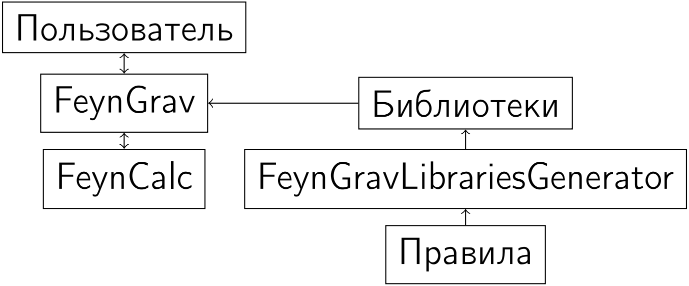
Правила взаимодействия

$s = 0$	[1,2]	Хорндески	[2,3,4]
$s = 1/2$	[1,2]	$SU(N)$ Янг-Миллс	[4]
$s = 1$	[1,2]	аксионное взаимодействие	[4]
$s = 2,\ m = 0$	[1,2]	Квадратичная гравитация	[4]
$s = 2,\ m \neq 0$	[4]		

[1] Class.Quant.Grav. 39 (2022) 16, 165006
[2] Comput.Phys.Commun. 292 (2023) 108871
[3] Symmetry 16 (2024) 117
[4] Comput.Phys.Commun. 310 (2025) 109508

FeynGrav

Вычислительный пакет в общем доступе
https://github.com/BorisNLatosh/FeynGrav



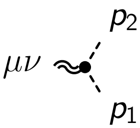
FeynGrav

$s = 0$	Теория Хорндески
$s = 1/2$	Дираковские фермионы, Модель SU(N) Янга-Миллса
$s = 1$	Электродинамика, поле Прока, Модель SU(N) Янга-Миллса, аксионное взаимодействие
$s = 2$	ОТО, Квадратичная гравитация, Массивная гравитация

FeynGrav: $\mathcal{O}\left(\kappa^2\right)$
Mendeley Data: up to $\mathcal{O}\left(\kappa^4\right)$

Latosh, Mendeley Data,"FeynGrav Libraries", (2024)

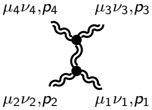
Пример: взаимодействие со скаляром



$$= \texttt{GravitonScalarVertex}[\{\mu,\nu\}, p_1, p_2, m]$$

$$= \frac{i}{2}\kappa\Big(\texttt{FVD}[p_1,\nu]\texttt{FVD}[p_2,\mu] + \texttt{FVD}[p_1,\mu]\texttt{FVD}[p_2,\nu] + m^2\texttt{MTD}[\mu,\nu] + \texttt{MTD}[\mu,\nu]\texttt{SPD}[p_1,p_2]\Big)$$

Пример: рассеяние гравитонов $2 \to 2$



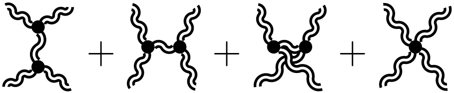
$$
\begin{aligned}
&= \texttt{GravitonVertex}[\mu_1, \nu_1, p_1, \mu_2, \nu_2, p_2, \alpha_1, \beta_1, -(p_1+p_2)] \\
&\times \texttt{GravitonPropagator}[\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, p_1 + p_2] \\
&\times \texttt{GravitonVertex}[\mu_3, \nu_3, p_3, \mu_4, \nu_4, p_4, \alpha_2, \beta_2, p_1+p_2]
\end{aligned}
$$

Время вычисления – меньше 6 минут

Sannan, Phys.Rev.D 34 (1986) 1749

FeynGrav

Древесная амплитуда на оболочке в $d = 4$



$$\mathcal{M} = i\,\frac{\kappa^2}{16}\,\frac{1}{s\,t\,u}\Big[s^4(1+h_1 h_3)(1+h_2 h_4)+t^4(1-h_1 h_2)(1-h_3 h_4)$$
$$+(2\,s^3 t+3\,s^2 t^2+2\,s\,t^3)\big((1+h_1 h_3)(1+h_2 h_4)-(h_1+h_3)(h_2+h_4)\big)\Big]$$

Время вычисления – меньше 15 минут

Пример: гравитационное рассеяние скаляров
Классичсекий случай

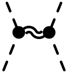
$$\mathcal{L} = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + \frac{G\, m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\left(G\,\mu\, m_1\, m_2\right)^2}{4\, p_{\text{cm}}^4\, \sin^4\frac{\theta}{2}}$$

Latosh, Yachmenev, Class.Quant.Grav. 40 (2023) 24, 245008

FeynGrav

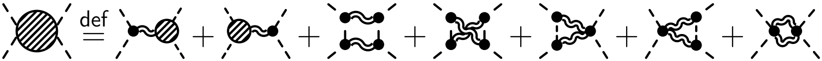
Квантовый случай, древесный уровень

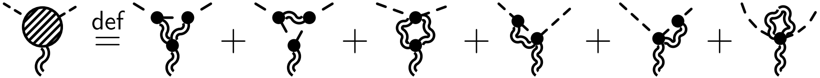


$$= -i\,\frac{\kappa^2}{4\,t}\left(s(s+t)-(2\,s+t)(m_1^2+m_2^2)+m_1^4+m_2^4\right)$$

FeynGrav

Первые петлевые поправки





Latosh, Mendeley Data, doi:10.17632/zyn47cnsz3.1, (2023).

Предел малых энергий

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(G\,\mu\,m_1\,m_2)^2}{4\,p_{\text{cm}}^4\,\sin^4\frac{\theta}{2}}\Bigg[\left\{1+\mathcal{O}\left(p_{\text{cm}}^2\right)\right\} + G\left\{32\,\pi^5\,p_{\text{cm}}\,(m_1+m_2)\sin\frac{\theta}{2}+\mathcal{O}\left(p_{\text{cm}}^2\right)\right\} + \mathcal{O}\left(G^2\right)\Bigg]$$

Другие примеры

- J.Exp.Theor.Phys. 136 (2023) 5, 555
- with A. Yachmenev, Class.Quant.Grav. 40 (2023) 24, 245008
- with Miok Park, Phys.Rev.D 110 (2024) 4, 046025
- Lian-Bao Jia, arXiv:2403.09487
- Simon Caron-Huot et al, arXiv:2408.06440
- Alexander Cassem et al, arXiv:2408.12118
- Humberto Gomez et al, arXiv:2411.07939
- Zi-Liang Wang et al, arXiv:2501.14516
- Chris Ewasiuk et al, Phys.Rev.D 111 (2025) 1, 015008

Заключение

- Теория возмущений вычислима в любом порядке по теории возмущений
- FeynGrav позволяет изучать квантовые гравитационные эффекты в Стандартной модели
- Дальнейшее развитие:
  - оптимизация
  - вычисление β-функций
  - инструменты: spinor helicity formalism, $\cdots$
  - новые модели: массивная гравитация, супергравитация, $\cdots$

Спасибо за внимание!