Интегрируемые Киральные Космологические Модели и Модифицированная Гравитация

Сессия-конференция секции ядерной физики ОФН РАН, посвященная 70-летию В.А. Рубакова

Иванов В.Р.[1] и Вернов С.Ю.[2]

[1]Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова
[2]НИИЯФ МГУ им. М.В. Ломоносова

21.02.2025

На основе работ:
Ivanov V.R., Vernov S.Y. Integrable Cosmological Models with an Arbitrary Number of Scalar Fields, Physics of Particles and Nuclei (to be published). — 2025. — arXiv:2407.05002;
Ivanov V.R., Vernov S.Y. New Integrable Chiral Cosmological Models with Two Scalar Fields, Phys. Rev. D. — 2024. — V. 110. — arXiv:2407.12732.

Введение

- Многие космологические модели ранней вселенной включают в себя скалярные поля.
- Однополевые модели с неминимальной связью скалярного поля с гравитацией могут быть преобразованы в модель ОТО с минимально связанным скалярным полем (переход от картины Йордана к картине Эйншейна).
- Модели с несколькими скалярными полями и неминимальной связью с гравитацией, в общем случае, к модели ОТО с минимально связанными полями и стандартным кинетическим членом не сводятся; После преобразования метрики получается модель ОТО с нестандартным кинетическим членом, так называемая киральная космологическая модель (ККМ).

Введение

- Цель работы — поиск интегрируемых моделей с несколькими скалярными полями, неминимально связанными с гравитацией, и переменным потенциалом.
- Мы получили общие решения уравнений эволюции для найденной интегрируемой модели с N скалярными полями в плоской метрике Фридмана-Леметра-Робертсона-Уокера (ФЛРУ).
- Кроме того, мы более подробно рассмотрели случай двух скалярных полей; для такого случая мы получили общие решения в метрике ФЛРУ с произвольной пространственной кривизной, а также получили эквивалентную ККМ в картине Эйнштейна.

Исходная модель

- Действие рассматриваемой модели:

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left(U\left(\phi^A\right)R - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\delta_{AB}\partial_\mu\phi^A\partial_\nu\phi^B - V\left(\phi^A\right)\right),$$

где заглавные латинские индексы нумеруют поля, $A = 1, 2, \ldots N$, и опускаются и поднимаются с помощью символа Кронекера δ_{AB}. Функции $U(\phi^A)$ и $V(\phi^A)$ — дифференцируемые, R — скаляр Риччи.

Исходная модель

- Уравнения Эйнштейна:

$$U\left(R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)=\nabla_\mu\nabla_\nu U-g_{\mu\nu}\Box U+\frac{1}{2}T_{\mu\nu},$$

где

$$T_{\mu\nu}=\delta_{AB}\partial_\mu\phi^A\partial_\nu\phi^B-g_{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\delta_{AB}\partial_\alpha\phi^A\partial_\beta\phi^B+V\right).$$

- Полевые уравнения:

$$\Box\phi^A=V_{,\phi^A}-RU_{,\phi^A}.$$

Исходная модель

- Уравнение следа (свертка уравнений Эйнштейна с метрическим тензором):

$$3\Box U - UR = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\delta_{AB}\partial_\mu\phi^A\partial_\nu\phi^B - 2V.$$

- Используя

$$\Box U = U_{,\phi^A}\Box\phi^A + U_{,\phi^A\phi^B}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi^A\partial_\beta\phi^B,$$

получаем

$$\left(3U^2_{,\phi^A} + U\right)R - \left[3U_{,\phi^A\phi^B} + \frac{\delta_{AB}}{2}\right]g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi^A\partial_\beta\phi^B = 3U_{,\phi^A}V_{,\phi^A} + 2V.$$

Модель с $R = \mathrm{const}$

- Пусть
$$U = U_0 - \frac{\delta_{AB}}{12}\left(\phi^A - \phi_0^A\right)\left(\phi^B - \phi_0^B\right),$$
где $\phi^A = \mathrm{const} \quad \forall A,\ U_0 = \mathrm{const}.$
- Тогда уравнение следа суть
$$\frac{1}{2}\left(\phi^A - \phi_0^A\right)V_{,\phi^A} - 2V + U_0 R = 0.$$
- Если $R = R_0 = \mathrm{const}$, то уравнение следа можно рассматривать как линейное УрЧП с потенциалом как неизвестной функцией. Общее решение уравнения:
$$V = \frac{R_0 U_0}{2} + \left(\phi^1 - \phi_0^1\right)^4 f\left(\frac{\phi^2 - \phi_0^2}{\phi^1 - \phi_0^1}, \frac{\phi^3 - \phi_0^3}{\phi^1 - \phi_0^1}, \ldots, \frac{\phi^N - \phi_0^N}{\phi^1 - \phi_0^1}\right),$$
где f — произвольная дифференцируемая функция.

Модель с $R = \mathrm{const}$

- Вывод: Если

$$U = U_0 - \frac{\delta_{AB}}{12}\left(\phi^A - \phi^A_0\right)\left(\phi^B - \phi^B_0\right),$$

и

$$V = \frac{R_0 U_0}{2} + \left(\phi^1 - \phi^1_0\right)^4 f\left(\frac{\phi^2 - \phi^2_0}{\phi^1 - \phi^1_0}, \frac{\phi^3 - \phi^3_0}{\phi^1 - \phi^1_0}, \dots, \frac{\phi^N - \phi^N_0}{\phi^1 - \phi^1_0}\right),$$

то R является интегралом движения рассматриваемой модели, причем $R = R_0$.

Уравнения N-полевой модели в плоской метрике ФЛРУ

- Метрика:

$$ds^2 = \,-\,N^2(\tau)d\tau^2 + a^2(\tau)\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right),$$

где где $N(\tau)$ — функция хода, и $a(\tau)$ — масштабная функция параметрического времени τ.

Уравнения N-полевой модели в плоской метрике ФЛРУ

- Уравнения:

$$6Uh^2+6h\dot{U}=\frac{1}{2}\delta_{AB}\dot{\phi}^A\dot{\phi}^B+N^2V,$$

$$-U\left(2\dot{h}+3h^2\right)-2Uh\frac{\dot{N}}{N}=\ddot{U}+2h\dot{U}-\dot{U}\frac{\dot{N}}{N}$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\delta_{AB}\dot{\phi}^A\dot{\phi}^B-N^2V\right),$$

$$\ddot{\phi}^A+\left(3h-\frac{\dot{N}}{N}\right)\dot{\phi}^A+V_{,\phi^A}N^2-6\left(\dot{h}+2h^2-h\frac{\dot{N}}{N}\right)U_{,\phi^A}=0,$$

где $h(\tau)\equiv\dot{a}/a$, точки обозначают дифференцирование по параметрическому времени τ, и мы предполагаем, что все поля однородны.

Уравнения N-полевой модели в плоской метрике ФЛРУ

- Будем использовать конформное время η, т.е. полагаем $N(\eta) = a(\eta)$.
- Для выбранных нами U и V система уравнений поля может быть записана как

$$\frac{d^2 y^A}{d\eta^2} + \frac{\partial}{\partial y^A} V\left(y_1, \ldots, y_N\right) = 0.$$

  Здесь $y^A(\eta) \equiv a(\eta)\ \phi^A(\eta)$.
- Первый интеграл системы:

$$\frac{1}{2}\delta_{AB}\frac{dy^A}{d\eta}\frac{dy^B}{d\eta} + V\left(y_1, \ldots, y_N\right) = \frac{1}{2}R_0 U_0 + E,$$

  где E — константа интегрирования.

Уравнения N-полевой модели в плоской метрике ФЛРУ

- Уравнение Эйнштейна “00” в конформном времени и с выбранными U и V есть

$$\left(\frac{h}{a}\right)^2 = \frac{R_0}{12} + \frac{E}{6U_0 a^4}.$$

Потенциал интегрируемой N-полевой модели. Интегралы движения

- Выберем потенциал
$$V(\phi^1, \dots, \phi^N) = \frac{R_0 U_0}{2} + \sum_{A=1}^{N} c_A \left(\phi^A\right)^4,$$
где где c_A — константы.
- У модели с таким потенциалом есть N независимых интегралов движения:
$$\frac{1}{2}\left(\frac{dy^A}{d\eta}\right)^2 + c_A \left(y^A\right)^4 = C^A,$$
где C^A — константа интегрирования, и к A не применяется соглашение Эйнштейна.

Потенциал интегрируемой N-полевой модели. Интегралы движения

- Получаем, что $E = \sum\limits_{A=1}^{N} C^A$, и

$$H^2(\tau) = \left(\frac{h}{a}\right)^2 = \frac{R_0}{12} + \frac{1}{6U_0 a^4} \sum_{A=1}^{N} C^A.$$

N-полевая модель. Точные решения для метрики

- Для записи решений в конформном времени нам понадобятся:

$$F\left(\varphi\,|\,m\right) = \int\limits_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m\sin^2\theta}},$$

— неполный эллиптический интеграл первого рода, $K(m) \equiv F(\pi/2\,|m)$ — полный эллиптический интеграл первого рода, и эллиптические функции Якоби sn, cn и dn. По определению, если $u = F\left(\varphi\,|\,m\right)$, то

$$\mathrm{am}\left(u\,|\,m\right) = \varphi, \qquad \mathrm{dn}\left(u\,|\,m\right) = \tfrac{d}{du}\mathrm{am}\left(u\,|\,m\right),$$

$$\mathrm{sn}\left(u\,|\,m\right) = \sin\left(\mathrm{am}\left(u\,|\,m\right)\right), \qquad \mathrm{cn}\left(u\,|\,m\right) = \cos\left(\mathrm{am}\left(u\,|\,m\right)\right).$$

N-полевая модель. Точные решения для метрики

- Если $E > 0$ и $R_0 \neq 0$, то

$$a_0 = \left(\frac{2E}{U_0 R_0}\right)^{\frac{1}{4}}, \quad \eta(t) = \eta_0 + \frac{1}{a_0}\sqrt{\frac{3}{R_0}} F\left(\arccos\left(\frac{a_0^2 - a^2}{a_0^2 + a^2}\right)\middle| \frac{1}{2}\right),$$

$$H(\eta) = \sqrt{\frac{R_0}{3}} \frac{\mathrm{dn}\left(a_0\sqrt{\frac{R_0}{3}}(\eta - \eta_0)\middle| \frac{1}{2}\right)}{1 - \mathrm{cn}\left(a_0\sqrt{\frac{R_0}{3}}(\eta - \eta_0)\middle| \frac{1}{2}\right)},$$

$$a(\eta) = \frac{a_0 \,\mathrm{sn}\left(a_0\sqrt{\frac{R_0}{3}}(\eta - \eta_0)\middle| \frac{1}{2}\right)}{1 + \mathrm{cn}\left(a_0\sqrt{\frac{R_0}{3}}(\eta - \eta_0)\middle| \frac{1}{2}\right)},$$

$$a_0\sqrt{\frac{R_0}{12}}(\eta - \eta_0) \in \left(0, K\left(\frac{1}{2}\right)\right).$$

N-полевая модель. Точные решения для метрики

- Если $E<0$ и $R_0\neq 0$, то

$$a_0=\left(\frac{-2E}{U_0R_0}\right)^{\frac{1}{4}},\quad \eta(t)=\eta_0+\frac{1}{a_0}\sqrt{\frac{6}{R_0}}F\left(\arcsin\left(\sqrt{\frac{a^2-a_0^2}{a^2}}\right)\middle|\frac{1}{2}\right),$$

$$a(\eta)=\frac{a_0}{\mathrm{cn}\left(a_0\sqrt{\frac{R_0}{6}}(\eta-\eta_0)\middle|\frac{1}{2}\right)},$$

$$H(\eta)=\sqrt{\frac{R_0}{6}}\mathrm{sn}\left(a_0\sqrt{\frac{R_0}{6}}(\eta-\eta_0)\middle|\frac{1}{2}\right)\mathrm{dn}\left(a_0\sqrt{\frac{R_0}{6}}(\eta-\eta_0)\middle|\frac{1}{2}\right),$$

$$a_0\sqrt{\frac{R_0}{6}}(\eta-\eta_0)\in\left(-K\left(\frac{1}{2}\right),K\left(\frac{1}{2}\right)\right).$$

N-полевая модель. Точные решения для метрики

- Если $E=0$ и $R_0\neq 0$, то

$$\eta(t)=\eta_0\pm\frac{1}{a_0}\sqrt{\frac{12}{R_0}}\left(1-e^{\mp\sqrt{R_0/12}(t-t_0)}\right)=\eta_0\pm\frac{1}{a_0}\sqrt{\frac{12}{R_0}}\left(1-\frac{a_0}{a}\right),$$

$$H(\eta)=\pm\sqrt{\frac{R_0}{12}},\qquad a(\eta)=\frac{a_0}{1\mp a_0\sqrt{R_0/12}\,(\eta-\eta_0)},$$

$$\pm a_0\sqrt{\frac{R_0}{12}}\,(\eta-\eta_0)\in(-\infty,1)\,.$$

N-полевая модель. Точные решения для метрики

- Если $E > 0$ и $R_0 = 0$, то

$$a_0 = \left(\frac{2E}{3U_0}\right)^{\frac{1}{4}}, \quad \eta(t) = \eta_0 + \frac{2}{a_0}\sqrt{t - t_0} = \eta_0 + \frac{2}{a_0^2}a,$$

$$H(\eta) = \frac{2}{a_0^2(\eta - \eta_0)^2}, \quad a(\eta) = \frac{1}{2}a_0^2\left(\eta - \eta_0\right),$$

$$\eta - \eta_0 \in (0, +\infty)\,.$$

N-полевая модель. Точные решения для полей

1. $C^A > 0, \quad c_A > 0$:

$$y^A(\eta) = \left(\frac{C^A}{c_A}\right)^{\frac{1}{4}} \mathrm{cn}\left(\pm 2\left(C^A c_A\right)^{\frac{1}{4}}(\eta - \eta_i) + \mathrm{cn}^{-1}\left(u_A \left| \frac{1}{2}\right.\right) \left| \frac{1}{2}\right.\right);$$

2. $C^A < 0, \quad c_A < 0$:

$$y^A(\eta) = \frac{\left(\frac{C^A}{c_A}\right)^{\frac{1}{4}}}{\mathrm{cn}\left(\pm 2\left(C^A c_A\right)^{\frac{1}{4}}(\eta - \eta_i) + \mathrm{cn}^{-1}\left(\frac{1}{u_A} \left| \frac{1}{2}\right.\right) \left| \frac{1}{2}\right.\right)};$$

N-полевая модель. Точные решения для полей

3. $C^A > 0, \quad c_A < 0$:

$$y^A(\eta) = \left|\frac{C^A}{c_A}\right|^{\frac{1}{4}} \frac{\mathrm{sn}\left(\pm 2\sqrt{2}\left|C^A c_A\right|^{\frac{1}{4}}(\eta-\eta_i) + \mathrm{sn}^{-1}\left(\frac{2u_A}{1+u_A^2}\middle|\frac{1}{2}\right)\middle|\frac{1}{2}\right)}{1+\mathrm{cn}\left(\pm 2\sqrt{2}\left|C^A c_A\right|^{\frac{1}{4}}(\eta-\eta_i) + \mathrm{cn}^{-1}\left(\frac{1-u_A^2}{1+u_A^2}\middle|\frac{1}{2}\right)\middle|\frac{1}{2}\right)}.$$

Константы $u_A = |c_A/C_A|^{1/4} y^A(\eta_i)$ и выбор знака "$\pm$" определяются начальными условиями, заданными при $\eta = \eta_i$. Суммирование по A не подразумевается.

4. При $c_A = 0$, C^A должно быть неотрицательным, и имеем

$$y^A(\eta) = y^A(\eta_i) + \frac{dy^A}{d\eta}(\eta_i)(\eta - \eta_i).$$

5. При $C^A < 0$ и $c_A \geqslant 0$ решений нет.

Двухполевая модель. Действие в картине Эйнштейна

- Совершим конформное преобразование метрики

$$g^{(\mathrm{E})}_{\mu\nu} = \frac{2U}{M_{\mathrm{Pl}}^2} g_{\mu\nu}.$$

- Действие в картине Эйнштейна:

$$S_{\mathrm{E}} = \int d^4x \sqrt{-g^{(\mathrm{E})}} \left(\frac{M_{\mathrm{Pl}}^2}{2} R_{\mathrm{E}} - \frac{g^{(\mathrm{E})\mu\nu}}{2} \sum_{A,B=1}^{2} K_{AB} \partial_\mu \phi^A \partial_\nu \phi^B - V_{\mathrm{E}} \right).$$

Здесь

$$K_{AB} = \frac{M_{\mathrm{Pl}}^2}{2U} \left(\delta_{AB} + \frac{3}{U} U_{,\phi^A} U_{,\phi^B} \right),$$

$$V_{\mathrm{E}} = \frac{M_{\mathrm{Pl}}^4}{4U^2} V.$$

Двухполевая модель. Действие в картине Эйнштейна

- Для выбранной функции $U(\phi^1,\phi^2)$ матрица K_{AB} — не диагональная:

$$
\begin{aligned}
K_{11} =& \frac{M_{\mathrm{Pl}}^2}{2U^2}\left(U+\frac{1}{12}\left(\phi^1\right)^2\right),\\
K_{12} =& K_{21} = \frac{M_{\mathrm{Pl}}^2}{24U^2}\phi^1\phi^2,\\
K_{22} =& \frac{M_{\mathrm{Pl}}^2}{2U^2}\left(U+\frac{1}{12}\left(\phi^2\right)^2\right).
\end{aligned}
$$

Двухполевая модель. Действие в картине Эйнштейна

- введем новую "массовую" матрицу G согласно

$$K_{CD}\partial_\mu\phi^C\partial_\nu\phi^D = K_{CD}\frac{\partial\phi^C}{\partial\chi^A}\frac{\partial\phi^D}{\partial\chi^B}\partial_\mu\chi^A\partial_\nu\chi^B = G_{AB}\partial_\mu\chi^A\partial_\nu\chi^B.$$

- Новые поля $\chi^{1,2}$ определим так:

$$\phi^1 = \sqrt{12U_0}\tanh\frac{\chi^2}{\sqrt{6}M_{\mathrm{Pl}}}, \quad \phi^2 = \frac{\sqrt{12U_0}}{\cosh\frac{\chi^2}{\sqrt{6}M_{\mathrm{Pl}}}}\tanh\frac{\chi^1}{\sqrt{6}M_{\mathrm{Pl}}}.$$

- Тогда

$$G_{11} = 1,$$
$$G_{12} = G_{21} = 0,$$
$$G_{22} = \cosh^2\left(\frac{\chi^1}{\sqrt{6}M_{\mathrm{Pl}}}\right).$$

Двухполевая модель. Действие в картине Эйнштейна

- Перепишем S_{E}, U и V в терминах новых полей:

$$S_{\mathrm{E}} = \int d^4x\sqrt{-g^{(\mathrm{E})}}\left(\frac{M_{\mathrm{Pl}}^2}{2}R^{(\mathrm{E})} - \frac{g^{(\mathrm{E})\mu\nu}}{2}\left[\partial_\mu\chi^1\partial_\nu\chi^1 + \cosh^2\left(\frac{\chi^1}{\sqrt{6}M_{\mathrm{Pl}}}\right)\partial_\mu\chi^2\partial_\nu\chi^2\right] - V_{\mathrm{E}}\right),$$

$$U(\chi^1,\chi^2) = \frac{U_0}{\cosh^2\left(\frac{\chi^1}{\sqrt{6}M_{\mathrm{Pl}}}\right)\cosh^2\left(\frac{\chi^2}{\sqrt{6}M_{\mathrm{Pl}}}\right)}.$$

$$V_{\mathrm{E}} = \frac{M_{\mathrm{Pl}}^4\left(\cosh\frac{\chi^1}{\sqrt{6}M_{\mathrm{Pl}}}\cosh\frac{\chi^2}{\sqrt{6}M_{\mathrm{Pl}}}\right)^2}{4U_0}\left(\frac{R_0}{2} + 144U_0\left[\tanh\frac{\chi^2}{\sqrt{6}M_{\mathrm{Pl}}}\right]^4 f\left(\frac{\tanh\frac{\chi^1}{\sqrt{6}M_{\mathrm{Pl}}}}{\sinh\frac{\chi^2}{\sqrt{6}M_{\mathrm{Pl}}}}\right)\right).$$

Двухполевая модель. Потенциал ϕ^4

- Для рассмотренного ранее потенциала

$$V(\phi^1, \phi^2) = \frac{R_0 U_0}{2} + c_1 \left(\phi^1\right)^4 + c_2 \left(\phi^2\right)^4$$

имеем

$$V_{\mathrm{E}} = \frac{M_{\mathrm{Pl}}^4}{4U_0^2} \left[\frac{1}{2} R_0 U_0 \cosh^4\left(\frac{\chi^1}{\sqrt{6}M_{\mathrm{Pl}}}\right) \cosh^4\left(\frac{\chi^2}{\sqrt{6}M_{\mathrm{Pl}}}\right) \right.$$
$$\left. + (12U_0)^2 c_1 \cosh^4\left(\frac{\chi^1}{\sqrt{6}M_{\mathrm{Pl}}}\right) \sinh^4\left(\frac{\chi^2}{\sqrt{6}M_{\mathrm{Pl}}}\right) + (12U_0)^2 c_2 \sinh^4\left(\frac{\chi^1}{\sqrt{6}M_{\mathrm{Pl}}}\right) \right].$$

- Решения для этой ККМ в плоской метрике ФЛРУ можно найти, используя полученные ранее решения в картине Йордана.

Двухполевая модель. Случай произвольной кривизны. Другие интегрируемые потенциалы

- Для двухполевого случая, мы также рассматривали метрику ФЛРУ с произвольной кривизной:

$$ds^2 = a^2(\tau)\left(-d\tau^2 + \frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\varphi^2\right).$$

- Кроме того, мы рассматривали и другой интегрируемый двухполевой потенциал:

$$V = \frac{1}{2} R_0 U_0 + c\left(\left(\phi^1\right)^2 + \left(\phi^2\right)^2\right)^2.$$

- Подробное рассмотрение этих случаев — в нашей работе Ivanov V.R., Vernov S.Y. New Integrable Chiral Cosmological Models with Two Scalar Fields, Phys. Rev. D. — 2024. — V. 110. — arXiv:2407.12732.

Заключение

- Был найден класс N-полевых моделей с неминимальной связью, для которых $R = \mathrm{const}$.
- Были получены общие решения уравнений эволюции для найденной интегрируемой модели с N скалярными полями в плоской метрике ФЛРУ.
- Для двухполевого случая была найдена эквивалентная ККМ в картине Эйнштейна.

Спасибо за внимание!