Некоторые особенности подхода к квантованию гравитации в формализме расширенного фазового пространства

Т. П. Шестакова

Кафедра теоретической и вычислительной физики,

Южный федеральный университет,

Ростов-на-Дону, Россия

E-mail: shestakova@sfedu.ru

Подход к квантованию гравитации, основанный на формализме расширенного фазового пространства:

V. A. Savchenko, T. P. Shestakova and G. M. Vereshkov, "Quantum Geometrodynamics of the Bianchi IX model in extended phase space", *Int. J. Mod. Phys*. A14 (1999), P. 4473 – 4490.

V. A. Savchenko, T. P. Shestakova and G. M. Vereshkov, "The exact cosmological solution to the dynamical equations for the Bianchi IX model", *Int. J. Mod. Phys*. A15 (2000), P. 3207 – 3220.

V. A. Savchenko, T. P. Shestakova and G. M. Vereshkov, "Quantum Geometrodynamics in extended phase space - I. Physical problems of interpretation and mathematical problems of gauge invariance", *Gravitation & Cosmology* 7 (2001), P. 18 – 28.

V. A. Savchenko, T. P. Shestakova and G. M. Vereshkov, "Quantum Geometrodynamics in extended phase space - II. The Bianchi IX model" , *Gravitation & Cosmology* 7 (2001), P. 102 – 116.

T. P. Shestakova, “Is the Wheeler – DeWitt equation more fundamental than the Schrödinger equation?”, *Int. J. Mod. Phys*. D27 (2018), 1841004 – P. 1-15.

T. P. Shestakova, “On the meaning of the wave function of the Universe”, *Int. J. Mod. Phys*. D28 (2019), 1941009 – P. 1-16.

T. P. Shestakova, “Wave function of the Universe, path integrals and gauge invariance”, *Gravitation & Cosmology* 25 (2019), P. 289-296.

T. P. Shestakova, “Is the Copenhagen interpretation inapplicable to quantum cosmology?”, *Universe* 6 (2020), 128 – P. 1-20.

Предпосылки обсуждаемого подхода к квантованию гравитации:

- Идеи о том, что в квантовой гравитации должны быть учтены все возможные топологии пространства-времени:

- 1955: Джон Уилер высказывает мысли о флуктуациях геометрии пространства-времени (spacetime foam);
- 1979: Стивен Хокинг предполагает, что именно учет различных топологий пространства-времени в квантовой гравитации может привести к наиболее интересным результатам.

Однако предположение о нетривиальной топологии Вселенной не может быть реализовано в рамках существующих подходов к квантованию калибровочных теорий!

Два основных подхода:

- Канонический подход (основан на гамильтоновом формализме, с выделенной ролью времени)

➢ топология пространства-времени ограничена произведением действительной прямой на некоторое трехмерное многообразие, $\mathbb{R} \times \Sigma$.

- Подход, основанный на континуальном интегрировании

➢ в этом подходе используется предположение о наличии асимптотических состояниях; в случае гравитации оно верно только в асимптотически плоских пространствах

Таким образом, приходим к выводу, что, как канонический подход, так и подход, основанный на континуальном интегрировании, не допускают произвольную топологию пространства-времени.

В таком случае мы получаем не квантовую теорию гравитации, а квантовую теорию поля на фоне некоторого фиксированного пространства-времени.

Предпосылки обсуждаемого подхода к квантованию гравитации:

При разработке большинства подходов к квантованию гравитации предполагалось, что они должны быть эквивалентны дираковской схеме квантования. Однако есть альтернатива дираковской обобщенной гамильтоновой динамике –

- Новая формулировка гамильтоновой динамики в расширенном фазовом пространстве

Присутствие члена, фиксирующего калибровку, в эффективном действии подсказывает альтернативный путь построения гамильтоновой динамики. Использование калибровки в дифференциальной форме позволяет ввести в эффективный лагранжиан недостающие обобщенные скорости. Пример – калибровка Лоренца в электродинамике.

$$S \longrightarrow S_{eff} = \int d^4x\left(\mathcal{L}_{ED} + \mathcal{L}_{gf} + \mathcal{L}_{ghost}\right) \qquad \mathcal{L}_{gf} = \pi\partial_\mu A^\mu = \pi\left(\dot{A}^0 + \partial_i A^i\right)$$

При этом гамильтониан может быть построен по обычному правилу

$$\mathcal{H} = \pi\dot{A}^0 + p_i\dot{A}^i - \mathcal{L}$$

Описание динамики системы со связями оказывается максимально приближенным к описанию системы без связей.

Особенности новой формулировки гамильтоновой динамики:

- Из эффективного действия Баталина – Вилковыского для гравитации мы можем получить расширенную систему лагранжевых уравнений, включающих уравнения для духов и калибровочные условия. Система гамильтоновых уравнений в расширенном фазовом пространстве оказывается полностью эквивалентной расширенной системе лагранжевых уравнений, а уравнения связей, калибровочные условия, уравнения для духов приобретают статус гамильтоновых уравнений.
- Связи сохраняются, они только модифицируются за счет того, что вместо действия исходной калибровочной теории рассматривается эффективное действие, так же, как модифицируются и другие уравнения Эйнштейна.
- Преобразования в расширенном фазовом пространстве, затрагивающие калибровочные степени свободы, являются каноническими. В подходе Дирака это не так, – калибровочные степени свободы рассматривались Дираком как излишние, которые могут быть исключены из теории.
- Генератор БРСТ-преобразований в расширенном фазовом пространстве строится в соответствии с теоремой Нетер, используя глобальную БРСТ-симметрию. Генератор дает преобразования для всех гравитационных переменных, включая калибровочные степени свободы, которые совпадают с калибровочными преобразованиями общей теории относительности.
- Группы преобразований в лагранжевом и гамильтоновом формализме оказываются полностью согласованными.

Модель с конечным числом степеней свободы:

$$S = \int dt \left[\frac{1}{2} g_{ab}(N,q)\dot{q}^a\dot{q}^b - U(N,q) + \pi\left(\dot{N} - \frac{\partial f}{\partial q^a}\dot{q}^a\right) + N\dot{\bar{\theta}}\dot{\theta} \right]$$

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} g^{ab} p_a p_b + \pi p_a f^{;a} + \frac{1}{2}\pi^2 f_{;a} f^{;a} - U(N,q) + \frac{1}{N}\bar{P}P \\ &= \frac{1}{2} G^{\alpha\beta} P_\alpha P_\beta + U(N,q) + \frac{1}{N}\bar{P}P \end{aligned}$$

$$f_{;a} = \frac{\partial f}{\partial q^a}; \quad G^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} f_{;a} f^{;a} & f^{;a} \\ f^{;a} & g^{ab} \end{pmatrix}; \quad Q^\alpha = (N, q^a); \quad P_\alpha = (\pi, p_a)$$

При отсутствии асимптотических граничных условий невозможно доказать калибровочную инвариантность теории. Уравнение Уилера – Де Витта теряет свои смысл.

Уравнение Шредингера:

$$i\frac{\partial\Psi(N,q,\theta,\bar{\theta};t)}{\partial t}=H\Psi(N,q,\theta,\bar{\theta};t),$$

$$H=-\frac{1}{2M}\frac{\partial}{\partial Q^{\alpha}}MG^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial Q^{\beta}}+U(N,q)-V[f]-\frac{1}{N}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}}$$

Разложение по собственным функциям оператора $(N-f(q))$, $\psi_k=\delta(N-f(q)-k)$,

$\frac{d}{dt}(N-f(q))=\{H,N-f(q)\}=0;$ в квантовой теории $[H,N-f(q)]=0.$

$$\Psi(N,q,\theta,\bar{\theta};t)=\int\Psi_k(q,t)\,\delta(N-f(q)-k)\,(\bar{\theta}+i\theta)\,dk$$

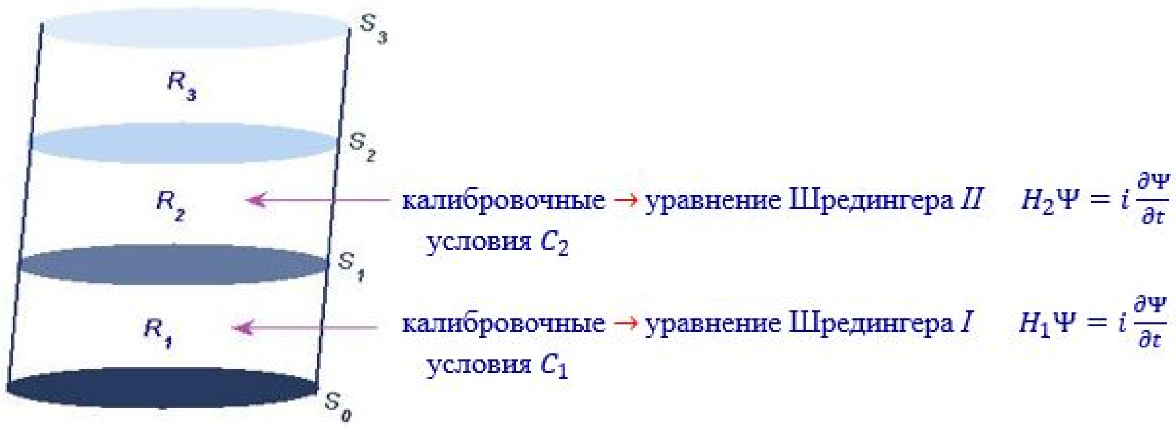
$$i\frac{\partial\Psi_k(q;t)}{\partial t}=H_{(phys)}[f]\Psi_k(q;t)\qquad H_{(phys)}=\left[-\frac{1}{2M}\frac{\partial}{\partial q^a}\left(Mg^{ab}\frac{\partial}{\partial q^b}\right)+U(N,q)+V[f]\right]\Bigg|_{N=f(q)+k}$$

Уравнение Шредингера оказывается калибровочно-зависимым.

Волновая функция Вселенной, удовлетворяющая этому уравнению, описывает геометрию Вселенной с точки зрения наблюдателя в некоторой фиксированной системе отсчета.

Метод континуального интегрирования позволяет рассматривать пространственно-временное многообразие, в разных областях которого наложены различные калибровочные условия.

Пространственно-временное многообразие M



$$\int \exp\left(iS\left[g_{\mu\nu}\right]\right)\prod_{x\in\mathcal{M}} M\left[g_{\mu\nu}\right]\prod_{\mu,\nu} dg_{\mu\nu}(x) =$$

$$= \int \exp\left(iS_{(eff)}\left[g_{\mu\nu}, C_1, \mathcal{R}_1\right]\right)\prod_{x\in\mathcal{R}_1} M\left[g_{\mu\nu}, \mathcal{R}_1\right]\prod_{\mu,\nu} dg_{\mu\nu}(x)\times$$

$$\times \exp\left(iS_{(eff)}\left[g_{\mu\nu}, C_2, \mathcal{R}_2\right]\right)\prod_{x\in\mathcal{R}_2} M\left[g_{\mu\nu}, \mathcal{R}_2\right]\prod_{\mu,\nu} dg_{\mu\nu}(x) \prod_{x\in\mathcal{S}_1} M\left[g_{\mu\nu}, \mathcal{S}_1\right]\prod_{\mu,\nu} dg_{\mu\nu}(x)\times\ldots$$

$$\left|g_{\mu\nu}^{(1)},\mathcal{S}_1\right\rangle = \exp\left[-iH_{1(phys)}\left(t_1-t_0\right)\right]\left|g_{\mu\nu}^{(0)},\mathcal{S}_0\right\rangle$$

$$\mathcal{P}\left(\mathcal{S}_1,t_1\right)\exp\left[-iH_{1(phys)}\left(t_1-t_0\right)\right]\left|g_{\mu\nu}^{(0)},\mathcal{S}_0\right\rangle$$

$$\left|g_{\mu\nu}^{(3)},\mathcal{S}_3\right\rangle = \exp\left[-iH_{3(phys)}\left(t_3-t_2\right)\right]\mathcal{P}\left(\mathcal{S}_2,t_2\right)\exp\left[-iH_{2(phys)}\left(t_2-t_1\right)\right]\mathcal{P}\left(\mathcal{S}_1,t_1\right)\exp\left[-iH_{1(phys)}\left(t_1-t_0\right)\right]\left|g_{\mu\nu}^{(0)},\mathcal{S}_0\right\rangle$$

На любой границе между областями с различными калибровочными условиями унитарная эволюция может быть нарушена. Операторы $\mathcal{P}(\mathcal{S}_i,t_i)$ проектируют состояния, полученные в результате унитарной эволюции в области R_i на базис в гильбертовом пространстве в соседней области R_{i+1}.

Интересно сопоставить выражение

$$\left|g_{\mu\nu}^{(3)},\mathcal{S}_3\right\rangle=\exp\left[-iH_{3(phys)}\left(t_3-t_2\right)\right]\mathcal{P}\left(\mathcal{S}_2,t_2\right)\exp\left[-iH_{2(phys)}\left(t_2-t_1\right)\right]\mathcal{P}\left(\mathcal{S}_1,t_1\right)\exp\left[-iH_{1(phys)}\left(t_1-t_0\right)\right]\left|g_{\mu\nu}^{(0)},\mathcal{S}_0\right\rangle$$

с формулой, которая описывает эволюцию квантовой системы согласно фон Нейману,

$$\left|\Psi\left(t_N\right)\right\rangle=U\left(t_N,t_{N-1}\right)\mathcal{P}\left(t_{N-1}\right)U\left(t_{N-1},t_{N-2}\right)\ldots U\left(t_3,t_2\right)\mathcal{P}\left(t_2\right)U\left(t_2,t_1\right)\mathcal{P}\left(t_1\right)U\left(t_1,t_0\right)\left|\Psi\left(t_0\right)\right\rangle,$$

где проекционные операторы соответствуют измерениям, сделанным в моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_{N-1}$.

Возникает вопрос:

- **Может ли квантовая гравитация быть источником нарушения унитарности?**

Важно помнить, что все сделанные выше заключения являются следствиями предположений о нетривиальной топологии пространства-времени и об отсутствии асимптотических состояний в квантовой гравитации.

Эти выводы не могут быть получены в подходах, основанных на уравнении Уилера – Де Витта или использующих предположение о наличии асимптотических состояний.