

Каноническое квантование полей в метрике Шварцшильда

И.П. Волобуев, В.О. Егоров, М.Н. Смоляков

НИИЯФ МГУ

- 1 V. Egorov, M. Smolyakov, I. Volobuev, Phys. Rev. D **107** (2023) 025001 [arXiv:2209.02067]
- 2 M. Smolyakov, Phys. Rev. D **108** (2023) 105006 [arXiv:2309.06249]
- 3 V. Egorov, M. Smolyakov, I. Volobuev, Class. Quant. Grav. **41** (2024) 045002 [arXiv:2309.06897]
- 4 V. Egorov, M. Smolyakov, I. Volobuev, [arXiv:2410.07049].

Действительное массивное скалярное поле

$$S = \int \mathcal{L} d^4x = \int \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{M^2}{2} \phi^2 \right) d^4x.$$

Метрика Шварцшильда

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_0}{r} \right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_0}{r}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2),$$

где r_0 – радиус Шварцшильда. Так как метрика статическая, уравнение движения для скалярного поля принимает вид

$$\sqrt{-g} g^{00} \ddot{\phi} + \partial_i (\sqrt{-g} g^{ij} \partial_j \phi) + M^2 \sqrt{-g} \phi = 0.$$

Подстановка $e^{\pm iEt} \phi_{lm}(E, \vec{x}) = e^{\pm iEt} Y_{lm}(\theta, \varphi) f_l(E, r)$ приводит к уравнению для радиальной части решения

$$E^2 \frac{r}{r-r_0} f_l - M^2 f_l + \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r(r-r_0) \frac{df_l}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} f_l = 0.$$

Введем новые безразмерные переменные

$$\mu = Mr_0, \quad \epsilon = Er_0, \quad z = \frac{r}{r_0} + \ln \left(\frac{r}{r_0} - 1 \right)$$

и новую функцию $\psi_l(\epsilon, z) = r f_l(E, r)$. В этих переменных радиальное уравнение может быть приведено к виду одномерного уравнения Шредингера

$$-\frac{d^2 \psi_l}{dz^2} + V_l(z) \psi_l = \epsilon^2 \psi_l,$$

где потенциал имеет вид

$$V_l(z) = \frac{r(z) - r_0}{r(z)} \left(\mu^2 + \frac{l(l+1)r_0^2}{r^2(z)} + \frac{r_0^3}{r^3(z)} \right).$$

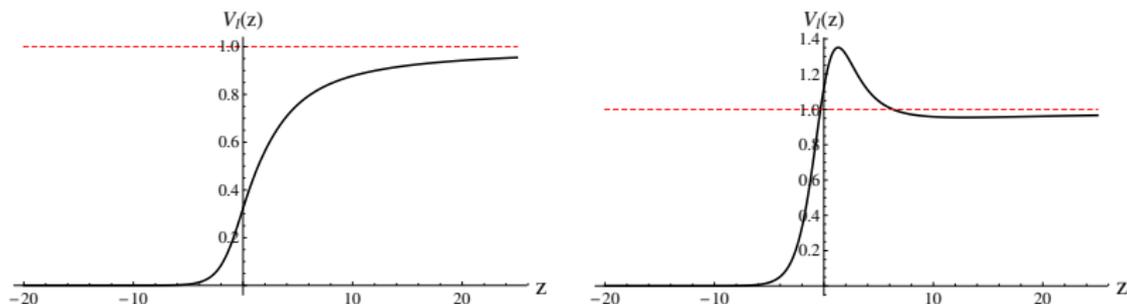


Рис. 1: $V_l(z)$ для $\mu = 1$: $l = 0$ и $l = 2$.

$0 < \epsilon < \mu \Rightarrow \psi_l(\epsilon, z)$ (одно решение),

$\mu < \epsilon \Rightarrow \psi_{lp}(q, z), p = 1, 2, q = \sqrt{\epsilon^2 - \mu^2}$ (два решения).

Эти решения составляют полную ортонормированную систему собственных функций. Обычно используют решения в виде (ниже приведен пример для безмассового скалярного поля)

$$\psi_{l1}(\epsilon, z) \sim e^{i\epsilon z} + R_{l1}e^{-i\epsilon z}, z \rightarrow -\infty; \quad \psi_{l1}(\epsilon, z) \sim T_{l1}e^{i\epsilon z}, z \rightarrow \infty,$$

$$\psi_{l2}(\epsilon, z) \sim T_{l2}e^{-i\epsilon z}, z \rightarrow -\infty; \quad \psi_{l2}(\epsilon, z) \sim e^{-i\epsilon z} + R_{l2}e^{i\epsilon z}, z \rightarrow \infty.$$

При $\epsilon > \mu$ асимптотики двух линейно независимых решений могут быть записаны в виде

$$\psi_{lp}(q, z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin \left(qz + \frac{\mu^2}{2q} \ln(z) + \kappa_{lp}(q) \right) \quad \text{при } z \rightarrow \infty,$$

$$\psi_{lp}(q, z) = \sqrt{\frac{q}{\pi \sqrt{q^2 + \mu^2}}} \sin(\epsilon z + \gamma_{lp}(q)) \quad \text{при } z \rightarrow -\infty.$$

При $r \rightarrow \infty$

$$f_{lp}(k, r) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi} r} \sin \left(kr + \frac{(2k^2 + M^2)r_0}{2k} \ln(kr) - \frac{\pi l}{2} + \tilde{\delta}_{lp}(k) \right),$$

где $k = \frac{q}{r_0}$ и $\tilde{\delta}_{lp}(k) = \kappa_{lp}(kr_0) - \frac{(2k^2 + M^2)r_0}{2k} \ln(kr_0) + \frac{\pi l}{2}$ есть фазовые сдвиги.

Выбор квантовых состояний. Шаг 1

$$\phi_p(\vec{k}, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i(\frac{\pi l}{2} + \tilde{\delta}_{lp}(k))} P_l \left(\frac{\vec{k}\vec{x}}{kr} \right) f_{lp}(k, r),$$

где $k = |\vec{k}|$, $r = |\vec{x}|$, $\vec{n} = \frac{\vec{x}}{r}$, $p = 1, 2$. При больших r

$$\phi_p(\vec{k}, \vec{x}) \approx \frac{1}{\sqrt{2}(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \left(e^{i\left(\vec{k}\vec{x} - \frac{(2k^2 + M^2)r_0}{2k} \ln(kr)\right)} + A_p(\vec{k}, \vec{n}, r) \frac{e^{ikr}}{r} \right),$$

$$A_p(\vec{k}, \vec{n}, r) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l \left(\frac{\vec{k}\vec{x}}{kr} \right) \times \left(e^{i\left(2\tilde{\delta}_{lp}(k) + \frac{(2k^2 + M^2)r_0}{2k} \ln(kr)\right)} - e^{-i\frac{(2k^2 + M^2)r_0}{2k} \ln(kr)} \right).$$

Выбор квантовых состояний. Шаг 2

$$\phi_{\pm}(\vec{k}, \vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\phi_1(\vec{k}, \vec{x}) \pm \phi_2(\vec{k}, \vec{x}) \right)$$

Можно показать, что решения $\phi_{\pm}(\vec{k}, \vec{x})$ вместе с решениями при $E < M$ образуют полную ортонормированную систему собственных функций. При больших r

$$\begin{aligned} \phi_+(\vec{k}, \vec{x}) &\approx \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{i\left(\vec{k}\vec{x} - \frac{(2k^2 + M^2)r_0}{2k} \ln(kr)\right)} \\ &\quad + \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \left(A_1(\vec{k}, \vec{n}, r) + A_2(\vec{k}, \vec{n}, r) \right) \frac{e^{ikr}}{r}, \\ \phi_-(\vec{k}, \vec{x}) &\approx \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \left(A_1(\vec{k}, \vec{n}, r) - A_2(\vec{k}, \vec{n}, r) \right) \frac{e^{ikr}}{r}. \end{aligned}$$

В частности, при $r \rightarrow \infty$

$$\phi_+(\vec{k}, \vec{x}) \approx \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{i\left(\vec{k}\vec{x} - \frac{(2k^2 + M^2)r_0}{2k} \ln(kr)\right)}, \quad \phi_-(\vec{k}, \vec{x}) \approx 0.$$



Рис. 2: Схематическое изображение решений различных типов.

$$\begin{aligned} \phi(t, \vec{x}) = & \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \int_0^M \frac{dE}{\sqrt{2E}} \left(e^{-iEt} \phi_{lm}(E, \vec{x}) a_{lm}(E) + \text{h.c.} \right) \\ & + \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\sqrt{k^2 + M^2}}} \left(e^{-i\sqrt{k^2 + M^2}t} \phi_{-}(\vec{k}, \vec{x}) b(\vec{k}) + \text{h.c.} \right) \\ & + \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\sqrt{k^2 + M^2}}} \left(e^{-i\sqrt{k^2 + M^2}t} \phi_{+}(\vec{k}, \vec{x}) a(\vec{k}) + \text{h.c.} \right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} [a_{lm}(E), a_{l'm'}^{\dagger}(E')] &= \delta_{jj'} \delta_{mm'} \delta(E - E'), \\ [a(\vec{k}), a^{\dagger}(\vec{k}')] &= [b(\vec{k}), b^{\dagger}(\vec{k}')] = \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}'). \end{aligned}$$

Можно показать, что выполняются коммутационные соотношения:

$$\begin{aligned} [\phi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{y})] &= i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \\ [\phi(t, \vec{x}), \phi(t, \vec{y})] &= [\pi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{y})] = 0, \end{aligned}$$

где $\pi(t, \vec{x}) = \sqrt{-g(\vec{x})} g^{00}(\vec{x}) \dot{\phi}(t, \vec{x})$.

Гамильтониан имеет вид

$$\begin{aligned} H &= \int \sqrt{-g} g^{00} :T_{00}: d^3x = \frac{1}{2} \int \sqrt{-g} g^{00} :(\dot{\phi}^2 - \ddot{\phi}\phi): d^3x \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \int_0^M E a_{lm}^\dagger(E) a_{lm}(E) dE \\ &\quad + \int \sqrt{k^2 + M^2} \left(b^\dagger(\vec{k}) b(\vec{k}) + a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}) \right) d^3k. \end{aligned}$$

Для сравнения, гамильтониан квантованного массивного скалярного поля в пространстве Минковского имеет вид

$$H = \int \sqrt{k^2 + M^2} a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}) d^3k.$$

Дополнительное вырождение – это чисто топологический эффект (топологическая структура пространства-времени Шварцшильда есть $R^2 \times S^2$, а пространства Минковского – R^4).

Массивное спинорное поле

Действие спинорного поля в произвольных криволинейных координатах

$$S = \int \sqrt{-g} \left(\frac{i}{2} \left(\bar{\psi} \gamma^{(\nu)} e_{(\nu)}^{\mu} \nabla_{\mu} \psi - \nabla_{\mu} \bar{\psi} e_{(\nu)}^{\mu} \gamma^{(\nu)} \psi \right) - M \bar{\psi} \psi \right) d^4 x,$$

где $e_{(\nu)}^{\mu}$ обозначает тетраду, а ковариантная производная определяется как

$$\nabla_{\mu} \psi = (\partial_{\mu} \psi + \omega_{\mu} \psi), \quad \nabla_{\mu} \bar{\psi} = (\partial_{\mu} \bar{\psi} - \bar{\psi} \omega_{\mu}),$$

$$\omega_{\mu} = \frac{1}{8} \omega_{(\nu)(\rho)\mu} \left[\gamma^{(\nu)}, \gamma^{(\rho)} \right].$$

Матрицы Дирака удовлетворяют условиям

$$\left\{ \gamma^{(\mu)}, \gamma^{(\nu)} \right\} = 2\eta^{(\mu)(\nu)} \quad \Leftrightarrow \quad e_{(\rho)}^{\mu} e_{(\sigma)}^{\nu} \left\{ \gamma^{(\rho)}, \gamma^{(\sigma)} \right\} = 2g^{\mu\nu}.$$

Будем искать решение в виде

$$\psi_{Ejlm}(t, r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{\frac{1}{4}}} \begin{pmatrix} f_{jl}(E, r) \Omega_{jlm}(\theta, \varphi) \\ ig_{jl'}(E, r) \Omega_{jl'm}(\theta, \varphi) \end{pmatrix} e^{-iEt},$$

где $l = j \pm \frac{1}{2}$, $l' = j \mp \frac{1}{2}$, и шаровые спиноры определены как

$$\Omega_{jlm}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} C_{l, m - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{jm} Y_l^{m - \frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \\ C_{l, m + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{jm} Y_l^{m + \frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \end{pmatrix}.$$

В результате получим радиальное уравнение

$$\sqrt{1 - \frac{r_0}{r}} \left(\sigma^{(1)} \frac{\kappa}{r} - i \sigma^{(2)} \sqrt{1 - \frac{r_0}{r}} \frac{d}{dr} + \sigma^{(3)} M \right) \begin{pmatrix} f_{jl} \\ g_{jl'} \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} f_{jl} \\ g_{jl'} \end{pmatrix},$$

где $\kappa = l(l+1) - j(j+1) - \frac{1}{4}$.

В безразмерных переменных $\mu = Mr_0$, $\epsilon = Er_0$, $\rho = \frac{r}{r_0}$, $z = \rho + \ln(\rho - 1)$ для $\epsilon > 0$ получаем уравнения

$$-\frac{d^2 u}{dz^2} + V_{\kappa}^{(u)}(\epsilon, z) u = \epsilon^2 u,$$

где исходные функции f_{jl} и g_{jl} выражаются через u , а квазипотенциал задаётся формулой

$$\begin{aligned} V_{\kappa}^{(u)}(\epsilon, z) = & \frac{\mu(\rho(z) - 1)^{\frac{3}{2}} - \kappa\epsilon\rho(z)\sqrt{\rho(z) - 1}}{2\rho^{\frac{9}{2}}(z)\left(\epsilon + \mu\sqrt{\frac{\rho(z)-1}{\rho(z)}}\right)} \\ & + \frac{\mu^2(\rho(z) - 1) - 2\mu\epsilon\sqrt{(\rho(z) - 1)\rho(z)}}{16\rho^5(z)\left(\epsilon + \mu\sqrt{\frac{\rho(z)-1}{\rho(z)}}\right)^2} + \\ & + \mu^2\frac{\rho(z) - 1}{\rho(z)} + \kappa\frac{(\rho(z) - 1)^{\frac{3}{2}}}{\rho^{\frac{7}{2}}(z)} + \kappa^2\frac{\rho(z) - 1}{\rho^3(z)}. \end{aligned}$$

Аналогично для $\epsilon < 0$.

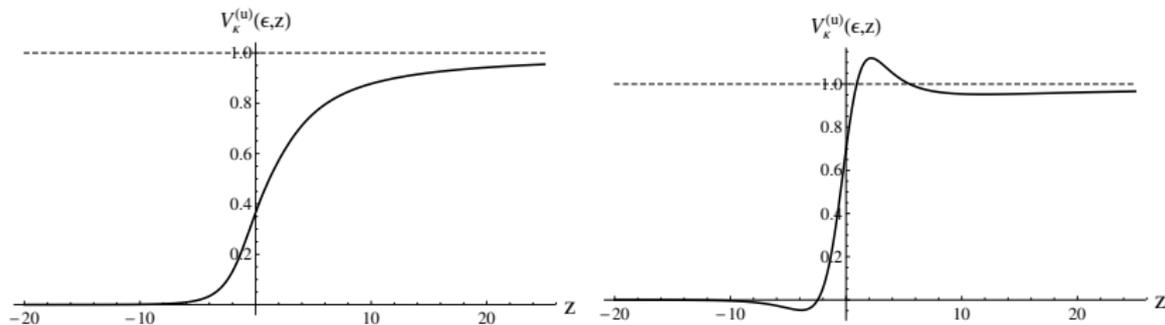


Рис. 3: $V_{\kappa}^{(u)}(\epsilon, z)$ для $\mu = 1, \kappa = -1, \epsilon = 0.5$ и $\mu = 1, \kappa = 2, \epsilon = 2$.

Решения с $E > 0$ даются формулами

$$\phi_{Ejlm}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{\frac{1}{4}}} \begin{pmatrix} f_{jl}(E, r) \Omega_{jlm}(\theta, \varphi) \\ ig_{jl'}(E, r) \Omega_{jl'm}(\theta, \varphi) \end{pmatrix},$$

$$\phi_{Ejlm}^{(p)}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{\frac{1}{4}}} \begin{pmatrix} f_{jl}^{(p)}(E, r) \Omega_{jlm}(\theta, \varphi) \\ ig_{jl'}^{(p)}(E, r) \Omega_{jl'm}(\theta, \varphi) \end{pmatrix}, \quad p = 1, 2.$$

Решения с $E < 0$: $f_{jl} \leftrightarrow g_{jl'}$, $f_{jl}^{(p)} \leftrightarrow g_{jl'}^{(p)}$.

Разложение спинорного поля по полной системе стационарных состояний имеет вид

$$\psi(t, r, \theta, \varphi) = \sum_{j=\frac{1}{2}}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \sum_{l=j \pm \frac{1}{2}} \left(\int_0^m dE \left(e^{-iEt} \phi_{Ejlm}(r, \theta, \varphi) a_{jlm}(E) + e^{iEt} \chi_{Ejlm}(r, \theta, \varphi) b_{jlm}^\dagger(E) \right) + \sum_{p=1}^2 \int_m^\infty dE \left(e^{-iEt} \phi_{Ejlm}^{(p)}(r, \theta, \varphi) a_{jlm}^{(p)}(E) + e^{iEt} \chi_{Ejlm}^{(p)}(r, \theta, \varphi) b_{jlm}^{(p)\dagger}(E) \right) \right),$$

где

$$\left\{ a_{jlm}(E), a_{j'l'm'}^\dagger(E') \right\} = \delta_{jj'} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta(E - E'),$$

$$\left\{ b_{jlm}(E), b_{j'l'm'}^\dagger(E') \right\} = \delta_{jj'} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta(E - E'),$$

$$\left\{ a_{jlm}^{(p)}(E), a_{j'l'm'}^{(p')\dagger}(E') \right\} = \delta_{pp'} \delta_{jj'} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta(E - E'),$$

$$\left\{ b_{jlm}^{(p)}(E), b_{j'l'm'}^{(p')\dagger}(E') \right\} = \delta_{pp'} \delta_{jj'} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta(E - E').$$

Можно показать, что выполняются антикоммутирующие соотношения

$$\begin{aligned} & \left\{ \psi_\alpha(t, r, \theta, \varphi), \psi_\beta^\dagger(t, r', \theta', \varphi') \right\} \\ &= \delta_{\alpha\beta} \frac{\sqrt{1 - \frac{r_0}{r}}}{r^2} \delta(r - r') \delta(\cos \theta - \cos \theta') \delta(\varphi - \varphi'), \\ & \left\{ \psi_\alpha(t, r, \theta, \varphi), \psi_\beta(t, r', \theta', \varphi') \right\} = \left\{ \psi_\alpha^\dagger(t, r, \theta, \varphi), \psi_\beta^\dagger(t, r', \theta', \varphi') \right\} = 0. \end{aligned}$$

Гамильтониан имеет вид

$$\begin{aligned} H &= \frac{i}{2} \int \frac{r^2 \sin \theta}{\sqrt{1 - \frac{r_0}{r}}} : (\psi^\dagger \dot{\psi} - \dot{\psi}^\dagger \psi) : dr d\theta d\varphi \\ &= \sum_{j=\frac{1}{2}}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \sum_{l=j \pm \frac{1}{2}} \left(\int_0^m E \left(a_{jlm}^\dagger(E) a_{jlm}(E) + b_{jlm}^\dagger(E) b_{jlm}(E) \right) dE \right. \\ & \left. + \sum_{p=1}^2 \int_m^\infty E \left(a_{jlm}^{(p)\dagger}(E) a_{jlm}^{(p)}(E) + b_{jlm}^{(p)\dagger}(E) b_{jlm}^{(p)}(E) \right) dE \right). \end{aligned}$$

$$S = -\frac{1}{4} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x,$$

где $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, а ∇_μ – ковариантная производная.
Можно наложить калибровочные условия

$$A_0 \equiv 0, \quad \nabla^\mu A_\mu + \frac{r_0}{r^2} A_r = 0.$$

В изотропных координатах t, \vec{R} второе условие принимает вид

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{r_0 \left(\frac{r_0}{4R} - 2 \right)}{2R^3 \left(1 - \left(\frac{r_0}{4R} \right)^2 \right)} (\vec{R} \vec{A}) = 0.$$

При $R \rightarrow \infty$ получаем калибровку Кулона $\operatorname{div} \vec{A} = 0$.

При $R \rightarrow r_0/4$ получаем калибровку Пуанкаре $(\vec{R} \vec{A}) = 0$.

Будем искать решение в виде

$$\vec{A}_{jm}(E, t, r, \theta, \varphi) = e^{-iEt} \sum_{\lambda=-1,0,1} F_j^{(\lambda)}(E, r) \vec{Y}_{jm}^{(\lambda)}(\theta, \varphi),$$

где $\vec{A} = (A_r, A_\theta, A_\varphi)$ и $\vec{Y}_{jm}^{(\lambda)}(\theta, \varphi)$ есть шаровые векторы

$$\vec{Y}_{jm}^{(-1)}(\theta, \varphi) = (1, 0, 0) Y_{jm}(\theta, \varphi),$$

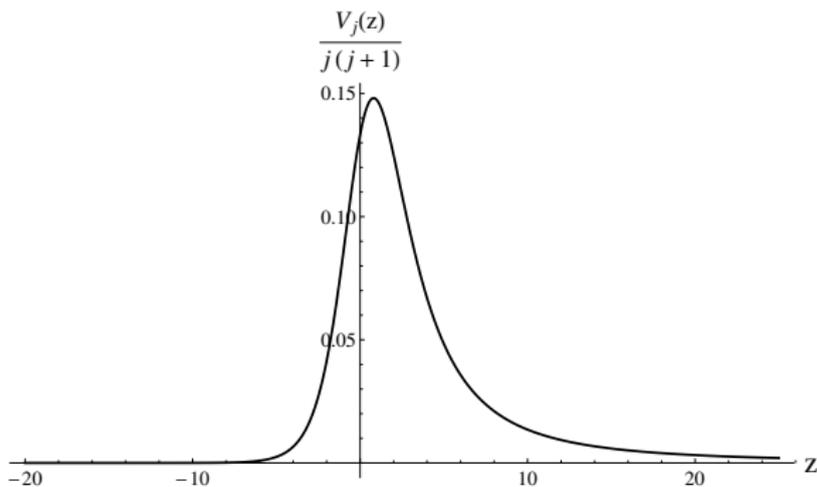
$$\vec{Y}_{jm}^{(0)}(\theta, \varphi) = \frac{i}{\sqrt{j(j+1)}} \left(0, \frac{1}{\sin \theta} \partial_\varphi, -\sin \theta \partial_\theta \right) Y_{jm}(\theta, \varphi),$$

$$\vec{Y}_{jm}^{(1)}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{j(j+1)}} (0, \partial_\theta, \partial_\varphi) Y_{jm}(\theta, \varphi).$$

Можно показать, что функции $F_j^{(-1)}(E, r)$ и $F_j^{(1)}(E, r)$ выражаются через функцию $F_j^{(0)}(E, r) = F_j(E, r)$, которая удовлетворяет уравнению

$$-\frac{d^2 F_j}{dz^2} + V_j(z) F_j = r_0^2 E^2 F_j,$$

где $z = \frac{r}{r_0} + \ln\left(\frac{r}{r_0} - 1\right)$ и $V_j(z) = j(j+1) \frac{\frac{r(z)}{r_0} - 1}{\left(\frac{r(z)}{r_0}\right)^3}$.



При фиксированных E, j, m , и p существует два независимых решения исходных уравнений движения, они имеют вид

$$e^{-iEt} \vec{A}_{jmp}^{(a)}(E, \vec{r}) = e^{-iEt} \frac{\sqrt{j(j+1)}}{E} \begin{pmatrix} \frac{1}{r^2} F_{jp}(E, r) Y_{jm}(\theta, \varphi) \\ \frac{(1-\frac{r_0}{r})}{j(j+1)} \partial_r F_{jp}(E, r) \partial_\theta Y_{jm}(\theta, \varphi) \\ \frac{(1-\frac{r_0}{r})}{j(j+1)} \partial_r F_{jp}(E, r) \partial_\varphi Y_{jm}(\theta, \varphi) \end{pmatrix},$$

$$e^{-iEt} \vec{A}_{jmp}^{(b)}(E, \vec{r}) = e^{-iEt} \frac{i}{\sqrt{j(j+1)}} F_{jp}(E, r) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sin \theta} \partial_\varphi Y_{jm}(\theta, \varphi) \\ -\sin \theta \partial_\theta Y_{jm}(\theta, \varphi) \end{pmatrix}.$$

Разложение поля по полной системе стационарных состояний имеет вид

$$\vec{A}(t, \vec{r}) = \sum_{p=1}^2 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \int_0^{\infty} \frac{dE}{\sqrt{2E}} \left(e^{-iEt} \vec{A}_{jmp}^{(a)}(E, \vec{r}) a_{jmp}(E) + e^{-iEt} \vec{A}_{jmp}^{(b)}(E, \vec{r}) b_{jmp}(E) + \text{h.c.} \right),$$

где

$$\left[a_{jmp}(E), a_{j'm'p'}^\dagger(E') \right] = \left[b_{jmp}(E), b_{j'm'p'}^\dagger(E') \right] = \delta_{pp'} \delta_{jj'} \delta_{mm'} \delta(E - E').$$

Гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{1}{2} \int \sum_k : (A_k \partial_0^2 A_k - (\partial_0 A_k)^2) : g^{kk} g^{00} \sqrt{-g} d^3 x$$
$$= \sum_{p=1}^2 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \int_0^{\infty} dE E \left(a_{jmp}^\dagger(E) a_{jmp}(E) + b_{jmp}^\dagger(E) b_{jmp}(E) \right).$$

Спасибо за внимание!

Доклад основан на результатах исследований в рамках научной программы Национального центра физики и математики, направление №5 “Физика частиц и космология”.