Универсальность Вожеля и цветовые факторы в неабелевых калибровочных теориях

А. П. Исаев[1,2]

[1]Лаборатория теор. физики им. Н.Н.Боголюбова, ОИЯИ, Дубна

[2]Физический факультет, МГУ им. М.В. Ломоносова

Сессия-конференция «Физика фундаментальных взаимодействий», посвященная 70-летию со дня рождения академика РАН В.А. Рубакова.
Москва, Президиум РАН, 17-21 февраля, 2025 г.

Content

1. Введение
2. Параметры Вожеля, карта Вожеля и универсальная алгебра Ли
3. Ли алгебры и расщепленный оператор Казимира
4. Универсальные формулы для лестничных диаграмм в глюодинамике
5. Универсальный аналог $1/N$ разложения

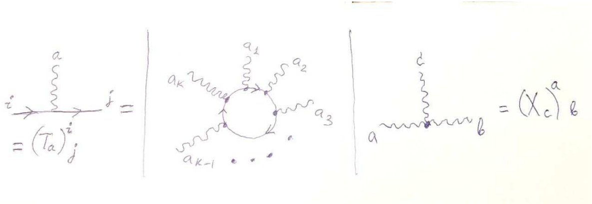
1. При вычислениях в неабелевых калибровочных теориях необходимо учитывать цветовые факторы диаграмм Фейнмана. Выражения для цветовых факторов зависят от выбора калибровочной группы. Так, для калибровочных групп $SU(N)$ цветовые факторы зависят от N. Как было замечено 'т Хофтом с [G. 't Hooft, *A planar diagram theory for strong interactions*, Nucl.Phys. B72 (1974) 46] структура $SU(N)$ калибровочной теории в пределе $N \to \infty$ имеет ряд замечательных свойств, а именно, при вычислении амплитуд выживают только планарные диаграммы Фейнмана. Это привело к идее метода вычислений, который называется $\frac{1}{N}$ разложением. Этот метод оказался весьма плодотворным не только в КТП, но и при исследовании моделей стат. физики, матричных моделей и т.д.

Существуют аргументы (см., например, [A. Strominger, *The Inverse Dimensional Expansion in Quantum Gravity*, Phys.Rev.D24 (1981) 3082]), указывающие на то, что теория (квантовой) гравитации упрощается при больших размерностях D пространства-времени.

2. Сложные теоретико-групповые факторы возникают при вычислениях в высших порядках теории возмущений (ТВ) в неабелевых калибровочных моделях с калибровочной группой G. Эти факторы выражаются в виде инвариантных сверток следов

$$d_{a_1 a_2 \dots a_k} = \mathrm{Tr}\big(T_{a_1} T_{a_2} \cdots T_{a_k}\big) \ ,$$

где $T_a = T(X_a)$ – представления образующих $X_a|_{a=1,\dots,\dim G}$ алгебры Ли группы G; T – фундаментальные (и спинорные для $G = SO(N)$) представления для полей материи и $T = \mathrm{ad}$ для векторных калибровочных полей.



Проблема: как найти минимальный набор таких инвариантов для всех групп G, через которые выражались бы все цветовые факторы во всех порядках ТВ.

3. Мы исследуем возможность унифицированного описания для цветовых факторов всех диаграмм Фейнмана определенного класса в неабелевых КТ для всех простых калибровочных групп G. Наш подход основывается на универсальном описании всех простых алгебр Ли, который был предложен П.Вожелем [P. Vogel, *The universal Lie algebra*, preprint (1999)].

Отметим, что универсальное описание цветовых факторов, которое мы предлагаем, может оказаться полезным для формулировки аналога разложения $1/N$ в случае исключительных калибровочных групп G_2, F_4, E_6, E_7, E_8.

1. Amazing fact: it was noticed in [P.Vogel (1999)] (see also [P.Deligne (1996), J.M.Landsberg and L.Manivel (2002),...]) that, for first $r = 2, 3, 4$ the representation $\mathrm{ad}^{\otimes r}$ of any simple Lie algebra $\mathfrak{g}$ (of Lie group G) can be decomposed

$$\mathrm{ad}^{\otimes r} = \oplus_{c_\Lambda} \; T^{(\Lambda)}_{c_\Lambda} \; , \qquad (1)$$

such that decomposition (1) is **universal** for all simple Lie algebras

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{su}_{n+1}, \; \mathfrak{so}_{2n+1}, \; \mathfrak{sp}_{2n}, \; \mathfrak{so}_{2n}, \; \mathfrak{g}_2, \; \mathfrak{f}_4, \; \mathfrak{e}_6, \; \mathfrak{e}_7, \; \mathfrak{e}_8 \; .$$

Here c_Λ are parameters which numerate subreps $T^{(\Lambda)}_{c_\Lambda}$ in $\mathrm{ad}^{\otimes r}$; they are expressed in terms of values of quadratic Casimir operators.

2. Moreover, there are **remarkable universal formulas** for $\dim(T^{(\Lambda)}_{c_\Lambda})$ for all simple LAs $\mathfrak{g}$. Formulas for $\dim(T^{(\Lambda)}_{c_\Lambda})$ are represented as **rational and homogeneous symmetric functions of 3 real parameters** (α, β, γ) called **Vogel parameters**, and all simple Lie algebras $\mathfrak{g}$ are special points in the space of (α, β, γ).

Example: $\mathrm{ad}^{\otimes 2}$ $(r=2)$. For all simple LAs (with rank >1) we have decomposition

$$\mathrm{ad}^{\otimes 2} \;=\; (\mathrm{ad} + \mathsf{X}_2) + \big(\mathbf{1} + \mathsf{Y}(\alpha) + \mathsf{Y}(\beta) + \mathsf{Y}(\gamma)\big)\;.$$

Reps in the r.h.s. depend on 3 parameters (α,β,γ), e.g. formulas for dimensions of these reps are homogeneous rational functions in (α,β,γ) (symmetry in (α,β,γ) is permutation of $\mathsf{Y}(\alpha),\mathsf{Y}(\beta),\mathsf{Y}(\gamma)$).
First we have famous P.Deligne formula:

$$\dim\mathfrak{g} \equiv \dim(\mathrm{ad}) \;=\; \frac{(\alpha-2t)(\beta-2t)(\gamma-2t)}{\alpha\beta\gamma} = \frac{(\hat\alpha-1)(\hat\beta-1)(\hat\gamma-1)}{\hat\alpha\hat\beta\hat\gamma}\,,$$

$$\hat\alpha := \frac{\alpha}{2t},\quad \hat\beta := \frac{\beta}{2t},\quad \hat\gamma := \frac{\gamma}{2t}\,,\qquad \boxed{t := \alpha+\beta+\gamma}.$$

Also we have

$$\dim(\mathsf{X}_2) \;=\; \frac{1}{2}\dim\mathfrak{g}\,(\dim\mathfrak{g}-3) = \frac{(1-\hat\alpha^2)(1-\hat\beta^2)(1-\hat\gamma^2)}{(\hat\alpha\hat\beta\hat\gamma)^2}\;.$$

For $\dim(Y(\alpha)),\ldots$ we have similar formulas.

Since all $\dim(T_{c_\wedge})$ are homogeneous symmetric functions of Vogel parameters (α, β, γ), it is possible to fix one of them, e.g. $\alpha = -2$. For this choice the sum $t := \alpha + \beta + \gamma$ coincides with dual Coxeter number $h^\vee$.

Table 1

Type	Lie algebra	α	β	γ	$t = h^\vee = \alpha + \beta + \gamma$	$\hat{\gamma} = \frac{\gamma}{2t}$
A_n	$s\ell(n+1)$	-2	2	$n+1$	$n+1$	$1/2$
B_n	$so(2n+1)$	-2	4	$2n-3$	$2n-1$	$\frac{2n-3}{2(2n-1)}$
C_n	$sp(2n)$	-2	1	$n+2$	$n+1$	$\frac{n+2}{2(n+1)}$
D_n	$so(2n)$	-2	4	$2n-4$	$2n-2$	$\frac{n-2}{2(n-1)}$
G_2	$\mathfrak{g}_2$	-2	$10/3$	$8/3$	4	$1/3$
F_4	$\mathfrak{f}_4$	-2	5	6	9	$1/3$
E_6	$\mathfrak{e}_6$	-2	6	8	12	$1/3$
E_7	$\mathfrak{e}_7$	-2	8	12	18	$1/3$
E_8	$\mathfrak{e}_8$	-2	12	20	30	$1/3$

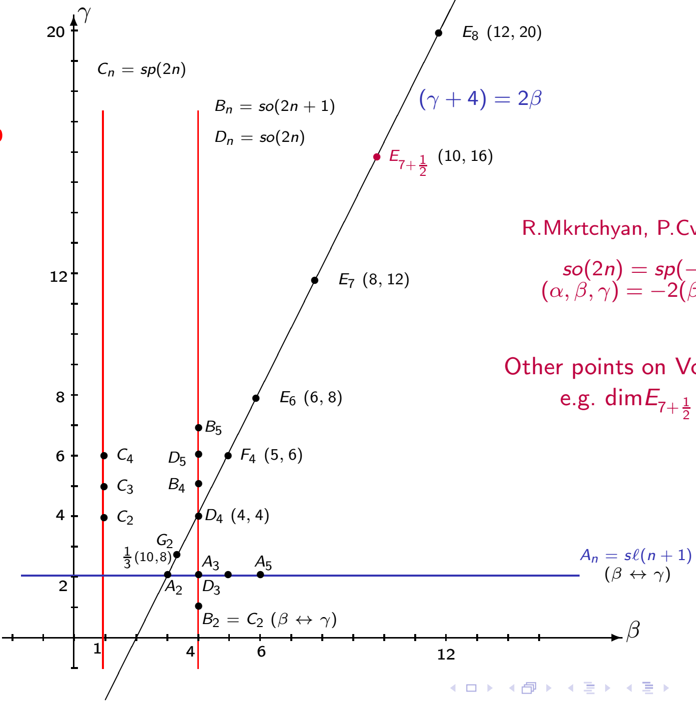
Note that, for all exceptional Lie algebras we have $2t = 3\gamma \;\to\; \hat{\gamma} = 1/3$.

———————————————————————————

One can consider all simple Lie algebras as points on the 2d plane $\mathcal{P}_{(\alpha=-2)}$ in 3d space of the Vogel parameters (α, β, γ). More precisely they are points in $\mathbb{RP}^2/S_3$ (the Vogel map).

Vogel map (1999)

$\alpha = -2$



R.Mkrtchyan, P.Cvitanović

$$so(2n) = sp(-2n) \Leftrightarrow (\alpha, \beta, \gamma) = -2(\beta, \alpha, \gamma)$$

Other points on Vogel map

e.g. $\dim E_{7+\frac{1}{2}} = 190$

Some achievements in the universal description of simple LA & LG.

1.) The generating function of universal eigenvalues $C_{\text{ad}}^{(k)}$ of the higher Casimir operators in the ad-representation of $\mathfrak{g}$ [R.Mkrtchyan, A.Sergeev and A.Veselov (2012)]

$$\hat{C}(z) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} C_{\text{ad}}^{(k)} z^k = \frac{1}{\dim(\mathfrak{g})}\left(\frac{1}{1+z} + \frac{\dim Y(\alpha)}{1+\frac{z\alpha}{2t}} + \frac{\dim Y(\beta)}{1+\frac{z\beta}{2t}} + \frac{\dim Y(\gamma)}{1+\frac{z\gamma}{2t}}\right) + \\ + \frac{1}{2}\dim(\mathfrak{g}) + \frac{1}{1+\frac{z}{2}} - \frac{3}{2}\,.$$

2.) Formula for volumes of compact simple Lie groups G [R.Mkrtchyan, A.Veselov]

$$\mathrm{Vol}(G) = (2^{3/2}\pi)^{\dim\mathfrak{g}}\; e^{-\Phi(\alpha,\beta,\gamma)}\,,$$

where $\Phi(\alpha,\beta,\gamma) = \int_0^\infty dz \frac{F(z/t)}{z(e^z-1)}$ and

$$F(z) = \frac{\mathrm{sh}\frac{z}{4}(\alpha-2t)\,\mathrm{sh}\frac{z}{4}(\beta-2t)\,\mathrm{sh}\frac{z}{4}(\gamma-2t)}{\mathrm{sh}\frac{z}{4}\alpha\;\mathrm{sh}\frac{z}{4}\beta\;\mathrm{sh}\frac{z}{4}\gamma} - \dim\mathfrak{g}\,. \qquad (2)$$

Here the first term in rhs is the deformation of the universal formula for $\dim\mathfrak{g} = \frac{(\alpha-2t)(\beta-2t)(\gamma-2t)}{\alpha\beta\gamma}$ (it is clear that $F(z)|_{z=0} = 0$).

Let $X_a \,|_{a=1,\dots,\dim \mathfrak{g}} \in T_e(G)$ be basis elements of Lie algebra (LA) $\mathfrak{g}$:

$$[X_a,\ X_b] = C^d_{ab}\, X_d \ , \tag{3}$$

C^d_{ab} – are structure constants. Matrices $\mathrm{ad}(X_a)^d_b = C^d_{ab}$ define **the adjoint representation** of $\mathfrak{g}$. The **invariant Cartan-Killing metric** is

$$\mathrm{g}_{ab} \equiv \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(X_a) \cdot \mathrm{ad}(X_b)) = C^d_{ac}\, C^c_{bd} \ . \tag{4}$$

For **simple Lie algebras**, the metric g_{ab} is invertible: $\mathrm{g}_{ab}\, \mathrm{g}^{bc} = \delta^c_a$, and for compact Lie algebras $\mathfrak{g}$, one can chose the basis: $\mathrm{g}_{ab} = -\delta_{ab}$.

The main object is **split (or polarized) Casimir operator** of LA $\mathfrak{g}$ is

$$\widehat{C} = \mathrm{g}^{ab} X_b \otimes X_a \equiv X^a \otimes X_a \ \in \ \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \ . \tag{5}$$

The operator $\widehat{C}$ is independent of the choice of the basis X_a in $\mathfrak{g}$ and commutes with the action of G:

$$(U \otimes U)\, \widehat{C} = \widehat{C}\, (U \otimes U) \ , \quad \forall U \in G \ .$$

Split Casimir operator $\widehat{C}$ appears in many applications: in the RT, in the theory of integrable systems, as colour factors in the nonabelian gauge theories, ...

1.) Higher Casimir operators $C^{(k)}$ (for $k > 2$) are constructed via split operator $\widehat{C}$ (see e.g. [A.P.I. and V.A. Rubakov, Theory of Groups and Symmetries, (2018)]).
Indeed, define

$$(\widehat{C})^k = (X_a \otimes X^a)^k = X_{a_1} \cdots X_{a_k} \otimes X^{a_1} \cdots X^{a_k} ,$$

then we take ad-representation in the second factor and then take trace

$$C^{(k)} = X_{a_1} \cdots X_{a_k} \underbrace{\mathrm{Tr}\big(\mathrm{ad}(X^{a_1} \cdots X^{a_k})\big)}_{d^{a_1 \cdots a_k}} \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}) .$$

2.) Universality follows from the fact that SCO in ad-representation $\widehat{C}_{\mathrm{ad}} := (\mathrm{ad} \otimes \mathrm{ad})\widehat{C}$ satisfies universal (for all simple LA) characteristic identity

$$\boxed{\widehat{C}_{\mathrm{ad}}\,(\widehat{C}_{\mathrm{ad}} + \frac{1}{2}) \cdot (\widehat{C}_{\mathrm{ad}} + 1)(\widehat{C}_{\mathrm{ad}} + \hat{\alpha})(\widehat{C}_{\mathrm{ad}} + \hat{\beta}) \cdot \underbrace{(\widehat{C}_{\mathrm{ad}} + \hat{\gamma})} = 0} , \qquad (6)$$

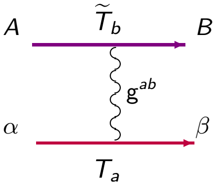
where $(\hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma}) = 1/2$. The Vogel parameters $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$ are eigenvalues of $\widehat{C}_{\mathrm{ad}}$ and their values for simple LA are given in Table 1. The last factor in (6) can be excluded for exceptional LA.
By using characteristic identity (6) for $\widehat{C}_{\mathrm{ad}}$ we construct projectors P_a on the eigen-subspaces in $\mathrm{ad} \otimes \mathrm{ad}$ with eigenvalues $a = 0, -\frac{1}{2}, 1, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$.

Let T and $\widetilde{T}$ be two representations of $\mathfrak{g}$. One can visualize split Casimir operator in the representation $T \otimes \widetilde{T}$:

$$(T^{\alpha}_{\beta} \otimes \widetilde{T}^{A}_{B})\, \widehat{C} \;=\; \mathrm{g}^{ab}\; T^{\alpha}_{\beta}(X_a)\; \widetilde{T}^{A}_{B}(X_b) \;\equiv\; \mathrm{g}^{ab}\,(T_a)^{\alpha}_{\beta}\;(\widetilde{T}_b)^{A}_{B}\;, \tag{7}$$

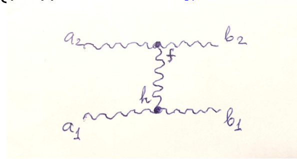
where $\alpha, \beta = 1, ..., \dim T$ and $A, B = 1, ..., \dim \widetilde{T}$:

$$(T_a)^{\alpha}_{\beta}\;\; \mathrm{g}^{ab}\;\; (\widetilde{T}_b)^{A}_{B} \qquad =$$



Colour factor for the Feynman diagram describing scattering of two particles in the reps T and $\widetilde{T}$ by exchange of the vector gauge field $\mathcal{A} \in \mathfrak{g}$.

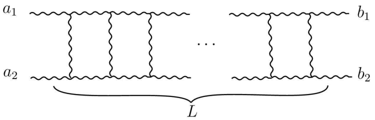
$$(\widehat{C}_{\mathrm{ad}})^{a_1 a_2}_{b_1 b_2} \;=\; C^{a_1}_{h b_1}\; C^{a_2}_{f b_2}\; \mathrm{g}^{hf} \;\; =$$



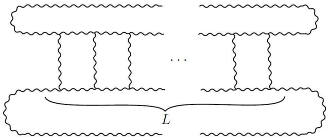
Universal formulas for ladder diagrams in gluedynamics

By using characteristic identities for SCO $\widehat{C}_{\mathrm{ad}}$ we construct projectors P_a on the eigen-subspaces in $\mathrm{ad}\otimes\mathrm{ad}$ with eigenvalue a.

Planar diagrams



$$(\widehat{C}_{\mathrm{ad}})^L = \Big(-\frac{1}{2}\Big)^L \mathsf{P}_{-\frac{1}{2}} + (-1)^L \mathsf{P}_{-1} + (-\hat{\alpha})^L \mathsf{P}_{-\hat{\alpha}} + (-\hat{\beta})^L \mathsf{P}_{-\hat{\beta}} + (-\hat{\gamma})^L \mathsf{P}_{-\hat{\gamma}}$$



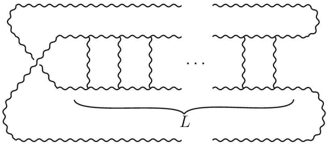
$$\mathrm{Tr}\big((\widehat{C}_{\mathrm{ad}})^L\big) = \big(-\tfrac{1}{2}\big)^L \dim V_{-\frac{1}{2}} + (-1)^L \dim V_{-1} +$$
$$+(-\hat{\alpha})^L \dim V_{-\hat{\alpha}} + (-\hat{\beta})^L \dim V_{-\hat{\beta}} + (-\hat{\gamma})^L \dim V_{-\hat{\gamma}} \;\sim d_{a_1\dots a_L} d^{a_1\dots a_L}$$

where $\dim V_a = \mathrm{Tr}\,\mathsf{P}_a$.

$$\mathrm{Tr}(\widehat{C}_{\mathrm{ad}})^L = \left(-\tfrac{1}{2}\right)^L \dim(\mathfrak{g}) + (-1)^L -$$

$$-(-1)^L\left[\hat{\alpha}^{L-2}\frac{(3\hat{\alpha}-1)(\hat{\beta}-1)(\hat{\gamma}-1)(2\hat{\beta}+1)(2\hat{\gamma}+1)}{8(\hat{\alpha}-\hat{\beta})(\hat{\alpha}-\hat{\gamma})\hat{\beta}\hat{\gamma}} + (\hat{\alpha}\leftrightarrow\hat{\beta}) + (\hat{\alpha}\leftrightarrow\hat{\gamma})\right].$$

Non-planar diagrams



$$\mathrm{Tr}(\mathbf{P}(\widehat{C}_{\mathrm{ad}})^L) = -\left(-\tfrac{1}{2}\right)^L \dim(\mathfrak{g}) - (-1)^L -$$

$$-(-1)^L\left[\hat{\alpha}^{L-2}\frac{(3\hat{\alpha}-1)(\hat{\beta}-1)(\hat{\gamma}-1)(2\hat{\beta}+1)(2\hat{\gamma}+1)}{8(\hat{\alpha}-\hat{\beta})(\hat{\alpha}-\hat{\gamma})\hat{\beta}\hat{\gamma}} + (\hat{\alpha}\leftrightarrow\hat{\beta}) + (\hat{\alpha}\leftrightarrow\hat{\gamma})\right] \sim$$

$$\sim d_{a_1 a_2 \ldots a_L a_{L+1} \ldots . a_{2L}}\; g^{a_1 a_{L+1}} \ldots g^{a_L a_{2L}}$$

Универсальный аналог $1/N$ разложения

Все универсальные формулы для цветовых факторов являются функциями от трех параметров $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$. В силу условия $\hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} = \frac{1}{2}$, эти функции характеризуется только двумя из трех параметров, в качестве которых выберем $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$. Далее вместо $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$ выберем их комбинации x и s такие, что $x \to 0$ $(\sim 1/N)$ и $s \to$const при $N \to \infty$ для групп $SU(N)$ и $SO(N)$.

Например,

$$x = \sqrt{-\hat{\alpha}\hat{\beta}}, \quad s = \sqrt{-\frac{\hat{\beta}}{\hat{\alpha}}} \quad \Longleftrightarrow \quad \hat{\alpha} = -xs^{-1}, \quad \hat{\beta} = xs.$$

Для алгебр Ли sl_N, so_N, $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{f}_4$, $\mathfrak{e}_6$, $\mathfrak{e}_7$, $\mathfrak{e}_8$, согласно Таблице 1, мы имеем

$$x^2 = \frac{1}{N^2}, \ \frac{2}{(N-1)^2}, \ \frac{5}{48}, \frac{5}{162}, \ \frac{1}{48}, \ \frac{2}{162}, \ \frac{1}{150},$$

и $s^2 = 1, \ 2, \ \frac{5}{3}, \ \frac{5}{2}, \ 3, \ 4, \ 6$ соответственно. Заметим, что параметр x меньше единицы для всех исключительных АЛ. Разлагая цветовые факторы в ряд по степеням x, мы будем получать аналог $1/N$ разложения сразу для всех простых АЛ.