Декаплинг скалярных глюонного и кваркового операторов в КХД с несколькими тяжёлыми кварками и эффективная константа связи Хиггс-глюон-глюон

К. Г. Четыркин, ИЯИ РАН

сессия ОЯФ РАН, посвящённая 70-летию академика
В.А. Рубакова

18 февраля 2025 г.

Введение: идея декаплинга на примере топ-кварка

полную QCD с 6 ароматами неудобно использовать, если характерные импульсы $Q \ll m_{top}$. Две основные причины:

- появление потенциально больших логарифмов типа $\ln Q^2/m_{top}^2$.
- вычисления становятся неоправдано сложными

Гораздо удобнее использовать низко-энергетическую эффективную КХД без t-кварка. Соответствующий Лагранжиан имеет стандартный КХД вид но с 5 активными кварками плюс (если нужно) $(1/m_{top})^n$ поправки.

История: общие концепции

- the decoupling theorem of T. Appelquist and J. Carazzone (1975) в своей буквальной форме не работает для /наиболее эффективной для вычислений/ $\overline{\text{MS}}$ схемы)
- для минимальных вычитаний ситуация была прояснена в работах S. Weinberg (1980); B. Ovrut, H. Schnitzer (1981): концепция эффективной теории с соответствующим эффективным лагранжианом (т.е. два <u>разных</u> лагранжиана для двух <u>разных</u> кинематических режимов)

Более формально: рассмотрим КХД лагранжиан с одним тяжелым кварком h и n_ℓ легкими:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\, G^a_{\mu\nu} G^{a\,\mu\nu} + \sum_{i=1-n_\ell} \bar{\psi}_i \left(\frac{i}{2}\overleftrightarrow{\not{D}} - m_i\right)\psi_i$$

$$+\bar{h}\left(\frac{i}{2}\overleftrightarrow{\not{D}} - m_h\right) h + \lambda_0 H \left(m_h \bar{h} h + \sum_{i=1-n_\ell} m_i \bar{\psi}_i \psi_i\right),$$

где мы ввели взаимодействие поля Хиггса с кварками. Такой лагранжиан подходит для вычисления распада $H \to$ hadrons.

Эффективный $\mathcal{L}'$ с n_ℓ кварками, имеет вид:

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{4}\left(G^a_{\mu\nu} G^{a\,\mu\nu}\right)' + \sum_{i=1-n_\ell} \bar{\psi}'_i \left(\frac{i}{2}\overleftrightarrow{\not{D}}' - m'_i\right)\psi'_i$$

$$+ + \lambda_0 H \left(C_1 \left(-\frac{1}{4}\, G^a_{\mu\nu} G^{a\,\mu\nu}\right)' + C_2 \sum_{i=1-n_\ell} m_i \bar{\psi}'_i \psi'_i\right),$$

Связь $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}'$

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{4}\left(G^a_{\mu\nu}G^{a\,\mu\nu}\right)' + \sum_{i=1-n_\ell}\bar{\psi}'_i\left(\frac{i}{2}\overleftrightarrow{\not{D}}' - m'_i\right)\psi'_i$$

$$+ + \lambda_0 H\left(C_1\left(-\frac{1}{4}G^a_{\mu\nu}G^{a\,\mu\nu}\right)' + C_2\sum_{i=1-n_\ell} m'_i\bar{\psi}'_i\psi'_i\right),$$

где все штрихованные величины относятся к КХД $\mathcal{L}'$ с n_ℓ кварками и связаны с нештрихованными простыми формулами ($\alpha_s \equiv g_s^2(\mu)/(4\pi), \alpha'_s \equiv (g'_s)^2(\mu)/(4\pi)$):

$$\alpha'_s = \alpha_s\zeta_\alpha\left(\alpha_s, \ln\frac{\mu^2}{m_h^2(\mu)}\right),\ \ m' = m\zeta_m\left(\alpha_s, \ln\frac{\mu^2}{m_h^2(\mu)}\right)$$

$+$ аналогичные формулы для всех полей, т.е. A', c', ψ' $+$ аналогичная зависмость обеих КФ-ий C_1 и C_2 <u>только</u> от $\alpha_s(\mu)$ и $\ln\frac{\mu^2}{m_h^2(\mu)}$

Удобные обозначения:

в полной теории с $\mathrm{n_f}$ кварками

$$\mathrm{O_1} = -\frac{1}{4}\,\mathrm{G^a_{\mu\nu}G^{a\,\mu\nu}} \equiv \mathrm{O_1^{(n_f)}}, \quad \mathrm{O_2} = \sum_{\mathrm{i=1-n_f}} \mathrm{m_i}\bar{\psi}_\mathrm{i}\psi \equiv \mathrm{O_2^{(n_f)}},$$

в эффективной теории с $\mathrm{n}_\ell = \mathrm{n_f} - 1$ кварками

$$\mathrm{O'_1} = -\frac{1}{4}\left(\mathrm{G^a_{\mu\nu}G^{a\,\mu\nu}}\right)' \equiv \mathrm{O_1^{(n_\ell)}}, \;\; \mathrm{O'_2} = \sum_{\mathrm{i=1-n_f}} \left(\mathrm{m_i}\bar{\psi}_\mathrm{i}\psi\right)' \equiv \mathrm{O_2^{(n_\ell)}},$$

Аналогичные обозначения применяем для КФ $\mathrm{C_1}$, $\mathrm{C_2}$ и α:

$$\mathrm{C_1} \equiv \mathrm{C_1^{(n_f)}}, \quad \mathrm{C_2} \equiv \mathrm{C_2^{(n_f)}} \quad \alpha_\mathrm{s} \equiv \alpha_\mathrm{s}^{\mathrm{n_f}}, \quad \alpha'_\mathrm{s} \equiv \alpha_\mathrm{s}^{\mathrm{n}_\ell}$$

История: вычисление функций ζ_α, ζ_{m}, etc.

- 2 loops: W. Bernreuther, W. Wetzel (1982); Erratum (1998)
  S. A. Larin, T. van Ritbergen, J. A. M. Vermaseren (1995)
- 3 loops: K. Ch., B. A. Kniehl, M. Steinhauser (1998)
- 4 loops: K. Ch., J. H. Kühn, C. Sturm (2006)
  Y. Schröder, M. Steinhauser (2006)

Эти вы вычисления (3 и 4 петли!) стали возможными благодаря:

Прорывам в теории:

метод проекторов /С. Горишный, С. Ларин, Ф. Ткачев (1983,1988)/
IBP /Ф. Ткачев (1981), Ф. Ткачев, К. Ч. (1981)

Прорывам в компьютерной алгебре:

язык FORM /J. Vermaseren (1990 . . . /
метод Лапорты /Laporta (1996 . . .) + много различных реализаций разных авторов, активно развивается и по сей день

Итак, после отщепления тяжелого кварка h эффективная связь Хиггса выглядит так:

$$\lambda_0 \mathrm{H} \left(\mathrm{C}_1 \mathrm{O}_1' + \mathrm{C}_2 \mathrm{O}_2' \right)$$

Много лет назад была доказана красивая низкоэнергетическая теорема (LET, /K.Ch., Kniehl, Steinhauser (1998)/)

$$\mathrm{C}_1 = \mathrm{m_h} \frac{\partial}{\partial \mathrm{m_h}} \ln \zeta_\alpha, \mathrm{C}_2 = 1 + \mathrm{m_h} \frac{\partial}{\partial \mathrm{m_h}} \ln \zeta_\mathrm{m}$$

справедливая (во всех порядках!) по α_s /$\overline{\mathrm{MS}}$ assumed!/

$$\begin{aligned} \mathrm{C}_1 &= \mathrm{m_h} \frac{\partial}{\partial \mathrm{m_h}} \ln \zeta_\alpha \equiv \mathrm{m_h} \frac{\partial}{\partial \mathrm{m_h}} \ln \alpha_\mathrm{s}' \\ \mathrm{C}_2 &= \mathrm{m_h} \frac{\partial}{\partial \mathrm{m_h}} \ln \zeta_\mathrm{m} \equiv \mathrm{m_h} \frac{\partial}{\partial \mathrm{m_h}} \ln \mathrm{m}' \end{aligned}$$

Хиггс-глюонная связь, декаплинг топ-кварка

Для реального Хиггса $2\,\mathrm{m_b} \ll \mathrm{M_h} \ll 2\,\mathrm{m_{top}}$, тогда можно положить $\mathrm{m_b} = \mathrm{m_c} = 0$ и RG-improved Хиггс-глюонная связь сводится к:

$$\lambda_0 \mathrm{H}\ \mathrm{C}_1(\alpha_s(\mu_t), 0)\ \ \frac{\beta'(\alpha'_s(\mathrm{M_h}))}{\beta'(\alpha'_s(\mu_t))}\ \ \mathrm{O}'_1|_{\mu=\mathrm{M_h}}\,.$$

где $\mathrm{m_t}(\mu_t) = \mu_t$, это так назыемая РГ-инвариантная масса, для которой $\ln \mu/\mathrm{m_t}(\mu)$ обращается в нуль,

$$\mu^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu^2} \alpha_s = \alpha_s \beta(\alpha_s),$$

где мы использовали хорошо известный факт, что в бесмассовой КХД комбинация $\beta \mathrm{O}_1$ является РГ-инвариантом.

Новая проблема: легкий Хиггс, отщепление t-a и b- кварков

Пусть $M_h \ll m_b$ (или даже $M_h \ll m_c$). Такие Хиггс-подобные частицы возникают в некоторых расширениях Стандартной модели (см., например,

D. Gorbunov, E. Kriukova and O. Teryaev, “Scalar decay into pions via Higgs portal,” [arXiv:2303.12847).

тогда, после отщепления t-кварка нам нужно знать что получится после отщепления b-кварка из(от?) глюонного оператора $O_1^{(5)}$. Насколько мне известно, эта задача пока никем не рассматривалась. Результат, очевидно, должен иметь вид:

$$O_1^{(5)} \underset{m_b \to \infty}{\Longrightarrow} C_{11} O_1^{(4)} + C_{12} O_2^{(4)}$$

ACADEMY OF SCIENCES OF THE USSR
INSTITUTE FOR NUCLEAR RESEARCH

V.P. Spiridonov

Anomalous Dimension of $G^2_{\mu\nu}$ and β-function

P-0378

MOSCOW
1984

Квантовый Принцип Действия (Y. Schwinger)

Рассмотрим порождающий функционал (размерная регуляризация предполагается)

$$\mathrm{G}(\mathcal{L},\mathrm{J}) = \int \mathcal{D}\,\Phi \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{S}(\Phi)+\Phi\cdot\mathrm{J}}, \quad \mathrm{S}(\Phi) = \int \mathcal{L}(\Phi)\mathrm{dx}$$

Принцип действия утверждает:

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\mathrm{G}(\mathcal{L},\mathrm{J}) \equiv \left(\int \mathcal{D}\,\Phi \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{S}(\Phi)+\Phi\cdot\mathrm{J}}\ \frac{\partial}{\partial\lambda}\mathrm{S}(\Phi)\right),$$

где λ — любой параметр в Лагранжиане. Важно, что Принцип действия работает как для “голых”, и MS-subtracted functions (если нет аксиальной аномалии)

/J.H. Lowenestein (71); Y.-M. P. Lam (72); . Breitenlohner and D. Maison (77)/

Простой пример применения принципа действия: перенормировка массового оператора $m\overline{\psi}\psi$ КХД. Мы дифференцируем перенормированный функционал:

$$G^R = R\int \mathcal{D}\,\Phi e^{i\int dx\,\mathcal{L}} \equiv \int \mathcal{D}\,\Phi e^{i\int dx\,\mathcal{L}_B}$$

по массе кварка ($i\,m\,\frac{\partial}{\partial m}$, интегрирование по dx в формулах ниже опущено) :

$$G^R_{O_2} = R\int \mathcal{D}\,\Phi\,(m\,\overline{\psi}\psi) e^{i\int dx\,\mathcal{L}} \equiv \int \mathcal{D}\,\Phi\,(m\,Z_m\,\overline{\psi}_B\psi_B)\,e^{i\int dx\,\mathcal{L}_B}$$

Таким образом, мы приходим к (хорошо известному) факту, что перенормировка массового оператора $O_2 = m\,\overline{\psi}\psi$ сводится к замене перенормированных массы и кваркового поля на соответствующие “голые”:

$$[O_2]_R \equiv [O_2]_B$$

А как найти перенормировку оператора O_1?

Важный трюк (Спиридонов, 84) ремасштабирование глюонного поля: $A_\mu^a \to \frac{A_\mu^a}{g}$ приводит к новому $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4g_s^2} G_{\mu\nu}^a G^{a\,\mu\nu} + \bar\psi \left(\frac{i}{2} \overleftrightarrow{\not\partial} - m \right) \psi + \bar\psi \not A^a T^a \psi, \; G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a +$$

Соответствующий “голый” $\mathcal{L}_B$ принимает вид:

$$\mathcal{L}_B = -\frac{1}{4(g_s)_B^2} [G_{\mu\nu}^a G^{a\,\mu\nu}]_B + \bar\psi_B \left(\frac{i}{2} \overleftrightarrow{\not\partial} - m_B \right) \psi_B + \bar\psi_B \not A_B^a T^a \psi_B,$$

Теперь мы можем дифференцировать по α_s, чтобы исследовать перенормировку оператора O_1:

$$G_{O_1}^R = i\,\alpha \frac{\partial}{\partial\alpha} G^R = R \int \mathcal{D}\Phi\, O_1\, e^{i\int dx\, \mathcal{L}} \equiv$$

$$\int \mathcal{D}\,\Phi \left(\alpha \frac{\partial}{\partial\alpha} \frac{[G_{\mu\nu}^a G^{a\,\mu\nu}]_B}{4g_s^B} + \alpha \frac{\partial}{\partial\alpha}\, m_b \overline{\psi}_B \psi_B \right) e^{i\int dx\, \mathcal{L}_B}$$

Используя $\alpha_0 = \mathrm{Z}_\alpha(\alpha)\alpha, \mathrm{m}_\mathrm{B} = \mathrm{Z}_\mathrm{m}(\alpha)\mathrm{m}$ и очевидное тождество:

$$\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \mathrm{F}(\alpha_0(\alpha)) = \left(\alpha_0 \frac{\partial}{\partial \alpha_0} \mathrm{F}(\alpha_0) \right) \alpha \frac{\partial}{\partial_\alpha} \ln \alpha_0$$

и дифференцируя только α_B и m_B мы немедленно получаем правильную перенормировку O_1:

$$[\mathrm{O}_1]_\mathrm{R} = (1 + \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \mathrm{Z}_\alpha)\, \mathrm{O}_{1,\mathrm{B}} + (1 + \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \mathrm{Z}_\mathrm{m})\, \mathrm{O}_{2,\mathrm{B}}$$

NB! естественно, голые поля внутри операторов $\mathrm{O}_{1,\mathrm{B}}$ и $\mathrm{O}_{2,\mathrm{B}}$ /и gauge fixing terms, etc/ зависят от α. Учёт этого факта приводит к дополнительному смешиванию O_1 с нефизическими операторами типа BRST вариаций или пропорциональных уравнениям движения /Kluberg-Sren, Zuber (1975) ... Spiridonov (1984)/

Идея: чтобы понять, как в пределе $m_h \to \infty$ будет выглядеть оператор $O_h \equiv m_h \bar{h} h$ давайте применим $m_h \frac{\partial}{\partial m_h}$ к эффективному порождаюшему функционалу с лагранжианом $\mathcal{L}'$

$$G^R_{O_h} = -i\, m_h \frac{\partial}{\partial m_h} G^R = R \int \mathcal{D}\Phi\, O_h\ e^{i\int dx\, \mathcal{L}} \equiv$$

$$\int \mathcal{D}\,\Phi \left(m_h \frac{\partial}{\partial m_h} \frac{[G^a_{\mu\nu} G^{a\,\mu\nu}]'_B}{4(g'_B)^2} + m_h \frac{\partial}{\partial m_h} \sum_{i=1-n_\ell} m'_{i,B} \overline{\psi}'_B \psi'_B \right) e^{i\int dx}$$

Поскольку $\alpha'_B = Z^{(n_\ell)}(\alpha')\alpha',\ \ \alpha' = \alpha\zeta(\alpha, \ln\frac{\mu^2}{m_h^2})$ и $m'_B = Z_m^{(n_\ell)}(\alpha')m',\ m' = m\zeta_m(\alpha, \ln\frac{\mu^2}{m_h^2})$ то, снова применяя цепное правило, мы немедленно получаем формулы для C_1 и C_2 уже обсуждавшиеся выше (и полученные 26 лет назад гораздо более сложным и менее прозрачным способом!)

Следующий шаг очевиден: вместо производной по массе применить к эффективному порождающему функционалу дифф. оператор $\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}$. Практически слово в слово повторяя предыдущие выкладки, мы немедленно получаем нужные нам формулы:

$$\mathrm{O}_1^{(\mathrm{n_f})} \underset{\mathrm{m_h}\to\infty}{\Longrightarrow} \mathrm{C}_{11}\mathrm{O}_1^{(\mathrm{n}_\ell)} + \mathrm{C}_{12}\mathrm{O}_2^{(\mathrm{n}_\ell)}$$

$$\mathrm{C}_{11} = 1 + \alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln\zeta_\alpha, \quad \mathrm{C}_{12} = \alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln\zeta_\mathrm{m}$$

которые стоит сравнить с

$$\mathrm{C}_1 = \mathrm{m_h}\frac{\partial}{\partial\mathrm{m_h}}\ln\zeta_\alpha, \quad \mathrm{C}_2 = 1 + \mathrm{m_h}\frac{\partial}{\partial\mathrm{m_h}}\ln\zeta_\mathrm{m},$$

Заключение

- Используя полученные формулы для C_1, C_2, C_{11} и C_{12} становится возможным легко и просто выполнять последовательный декаплинг тяжелых кварков и RG-improvment (т..е суммирование потенциально опасных больших логарифмов) при рассмотренни Хиггс-подобного лёгкого бозона
- Для RG-improvment достаточно использовать РГ-инвариантную комбинацию (так называемая аномалия следа тензора энергии-импульса):

$$\theta^{\nu}_{\nu} = (1 - 2\gamma_{\mathrm{m}})\, \mathrm{m}\bar{\psi}\psi + \frac{\beta}{2} G^2_{\mu\nu}$$

Спасибо за внимание!