

Качельный механизм с тяжёлыми нейтральными лептонами: нижняя граница смешивания и псевдовырожденное состояние

Краснов И.В.

ИЯИ РАН

21.02.2025

Сессия-конференция ОФН РАН
посвященная 70-летию В. А. Рубакова



Введение

- 1 Тяжёлые нейтральные лептоны
- 2 2HNL
- 3 2HNL: минимальное смешивание
- 4 2HNL: псевдовырожденное состояние
- 5 3HNL
- 6 3HNL: минимальное смешивание
- 7 3HNL: псевдовырожденное состояние
- 8 Заключение



Тяжёлые нейтральные лептоны (Heavy Neutral Leptons, HNL)

$$\mathcal{L} = i\bar{N}_I\gamma^\mu\partial_\mu N_I - \left(\frac{1}{2}M_N\bar{N}_I^c N_I + \hat{Y}_{\alpha I}\bar{L}_\alpha\tilde{H}N_I + h.c.\right) \quad (1)$$

- Дают объяснение масштабов масс активных нейтрино.
- Могут быть экспериментально обнаружены.
- Теорию можно перенормировать.
- Число свободных параметров позволяет объяснить другие актуальные космологические задачи: генерация барионной асимметрии Вселенной, тёмная материя...
- Удобны феноменологически: потенциально измеряемые масса M_N и три угла смешивания полностью определяют взаимодействие для каждого тяжёлого нейтрального лептона.

$$U = \frac{v}{\sqrt{2}}M_N^{-1}Y = iM_N^{-\frac{1}{2}}Rm_v^{\frac{1}{2}}U_{PMNS}^\dagger$$



Мотивация

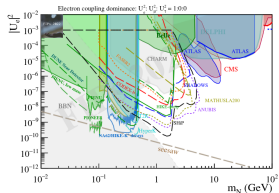


Figure 174: **Sensitivity to HNL with electron coupling (BC6).** Current bounds and future projections for 90% CL exclusion limits. **Legend:** filled gray areas are bounds coming from interpretation of old data sets or astrophysical data; filled coloured areas are bounds set by experimental collaborations; Solid coloured lines are projections based on existing data sets; Dashed coloured lines are projections based on full Monte Carlo simulations; Dotted coloured lines are projections based on toy Monte Carlo simulations. Filled areas are existing bounds from: PS191 [1561], CHARM [1432], PIENU [1785], NA62 ($N_{\nu\tau}$) [1177], T2K [1786], Belle [1787], DELPHI [1788], ATLAS [1627, 1621], and CMS [1625, 1620, 1631]. Coloured curves are projections from: PRONFER [1791], HIKE- K^+ [1191, 1191], HIKE-dump [1392, 1191], DarkQuest [1255], Belle II [1782], FASER2 [1416], DUNE near detector [1172], Hyper-K (projections based on [1562]), CODEX-b [1030], SHIP [1402], SHADOWS [1401] and MATHUSLA200 [1441]. The BBN bounds are from [1686]. The dashed seesaw line is given by $|U_{eN}|^2 = \sqrt{\Delta m_{atm}^2/M_N}$ corresponding to the naive seesaw scaling and should be considered only as indicative.

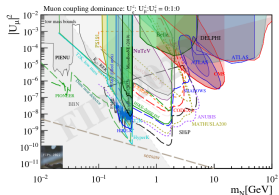


Figure 175: **Sensitivity to HNL with muon coupling (BC7).** Current bounds and future projections for 90% CL exclusion limits. **Legend:** filled gray areas are bounds coming from interpretation of old data sets or astrophysical data; filled coloured areas are bounds set by experimental collaborations; Solid coloured lines are projections based on existing data sets; Dashed coloured lines are projections based on full Monte Carlo simulations; Dotted coloured lines are projections based on toy Monte Carlo simulations. Filled coloured areas are existing bounds from: PS191 [1561], CHARM [1432], PIENU [1785], NA62 ($N_{\nu\tau}$) [1177], T2K [1786], Belle [1787], DELPHI [1788], ATLAS [1627, 1621] and CMS [1625, 1620, 1631]. Coloured curves are projections from: PRONFER [1791], HIKE- K^+ [1191, 1191], HIKE-dump [1392, 1191], HIKE-dump [1392, 1191], DarkQuest [1257], Belle II [1782], FASER2 [1416], DUNE near detector [1172], Hyper-K (projections based on [1562]), SHIP [1402], CODEX-b [1030], and MATHUSLA200 [1441]. The BBN bounds are from [1686]. The dashed seesaw line is given by $|U_{\mu N}|^2 = \sqrt{\Delta m_{atm}^2/M_N}$ corresponding to the naive seesaw scaling and should be considered only as indicative.

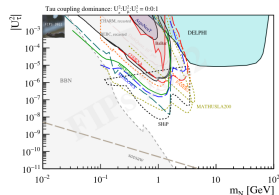


Figure 176: **Sensitivity to HNL with tau coupling (BC8).** Current bounds and future projections for 90% CL exclusion limits. **Legend:** filled gray areas are bounds coming from interpretation of old data sets or astrophysical data; filled coloured areas are bounds set by experimental collaborations; Solid coloured lines are projections based on existing data sets; Dashed coloured lines are projections based on full Monte Carlo simulations; Dotted coloured lines are projections based on toy Monte Carlo simulations. Filled areas are existing bounds from: CHARM (recoasted) [1432] and BEBC (recoasted) [1764]; ArgoNeut [1781]; BaBar [1612]; DELPHI [1788]; T2K [1786]. Coloured curves are projections from: HIKE-dump [1392], SHIP [1402], DarkQuest [1257], Belle II [1782], DUNE [1172], FASER2 [1416], CODEX-b [1030], and MATHUSLA200 [1441]. The BBN bounds are from [1686]. The dashed seesaw line is given by $|U_{\tau N}|^2 = \sqrt{\Delta m_{atm}^2/M_N}$ corresponding to the naive seesaw scaling and should be considered only as indicative.

Рис. 1: Ref. 2305.01715.

В лжившейся практике графики смешивания HNL приводят для случаев $U_e : U_\mu : U_\tau = 1 : 0 : 0$, $U_e : U_\mu : U_\tau = 0 : 1 : 0$ и $U_e : U_\mu : U_\tau = 0 : 0 : 1$. Линия seesaw – оценка $\sqrt{\Delta m_{atm}^2/M_N}$.



2HNL

$$U = i \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{M_1}} \Gamma_{11} & \frac{1}{\sqrt{M_1}} \Gamma_{12} & \frac{1}{\sqrt{M_1}} \Gamma_{13} \\ \frac{1}{\sqrt{M_2}} \Gamma_{21} & \frac{1}{\sqrt{M_2}} \Gamma_{22} & \frac{1}{\sqrt{M_2}} \Gamma_{23} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где

$$\Gamma_{1i} \equiv \lambda_{1i} \cos(z) - \lambda_{2i} e^{i\psi} \sin(z) \quad (3)$$

$$\Gamma_{2i} \equiv \lambda_{1i} \sin(z) + \lambda_{2i} e^{i\psi} \cos(z) \quad (4)$$

Нормальная иерархия: $m_1 = 0$; Обратная иерархия: $m_3 = 0$;

$$\lambda_{1i} \equiv \sqrt{m_2} U_{PMNS_{2i}}^\dagger;$$

$$\lambda_{2i} \equiv \sqrt{m_3} U_{PMNS_{3i}}^\dagger;$$

$$e^{i\psi} = \pm e^{-i\frac{\alpha_2}{2}}$$

$$\lambda_{1i} \equiv \sqrt{m_1} U_{PMNS_{1i}}^\dagger;$$

$$\lambda_{2i} \equiv \sqrt{m_2} U_{PMNS_{2i}}^\dagger;$$

$$e^{i\psi} = \pm e^{i\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}}$$

В активном секторе пока плохо определены CP-нарушающие фазы δ, ψ . В стерильном – комплексный угол z .



2HNL: минимальное смешивание

Можно увидеть, что случай минимального смешивания HNL с определённым флэйвором $U_{sum,\alpha}^2 = \frac{1}{M_1} |\Gamma_{1\alpha}|^2 + \frac{1}{M_2} |\Gamma_{2\alpha}|^2$ в случае отсутствия вырождения по массе достигается когда лишь один HNL смешивается с этим флэйвором:

$$\frac{\partial U_{sum,\alpha}^2}{\partial z} = -\frac{1}{M_1} \Gamma_{1\alpha}^* \Gamma_{2\alpha} + \frac{1}{M_2} \Gamma_{2\alpha}^* \Gamma_{1\alpha} = 0 \quad (5)$$

Т.е.:

$$\Gamma_{1\alpha} = 0 \quad (6)$$

$$\Gamma_{2\alpha} = 0 \quad (7)$$

$$M_1 = M_2, |\Gamma_{1\alpha}| \neq 0, |\Gamma_{2\alpha}| \neq 0, \Gamma_{1\alpha}^* \Gamma_{2\alpha} - \Gamma_{1\alpha} \Gamma_{2\alpha}^* = 0 \quad (8)$$

Все три случая приводят к одному и тому же выражению от δ, ψ для минимального значения угла смешивания:

$$U_{min,\alpha}^2 = \frac{|m_1 U_{PMNS_{1\alpha}}^{\dagger 2} e^{i\alpha_1} + m_2 U_{PMNS_{2\alpha}}^{\dagger 2} e^{i\alpha_2} + m_3 U_{PMNS_{3\alpha}}^{\dagger 2}|}{M_{max}} \equiv \frac{|m_{\alpha\alpha}|}{M_{max}}$$



2HNL: минимальное смешивание

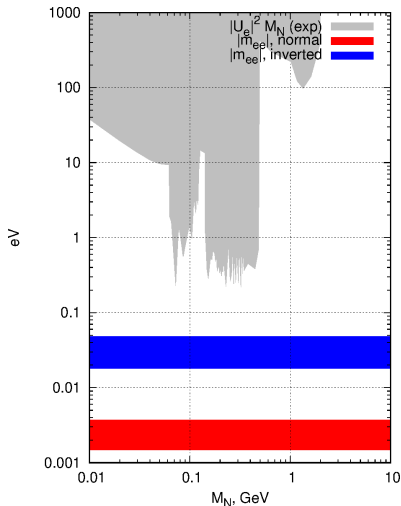


Рис. 2: Текущие экспериментальные ограничения на величину $M_N |U_{eN}|^2$ и разброс значения $|m_{ee}|$ как функции CP-нарушающих фаз.



2HNL: псевдовырожденное состояние

Заметим, что величины $\mathcal{M}_{1\alpha} = |\Gamma_{1\alpha}|^2$ и $\mathcal{M}_{2\alpha} = |\Gamma_{2\alpha}|^2$ связаны между собой:

$$\mathcal{M}_{1\alpha} + \mathcal{M}_{2\alpha} = |\Gamma_{1\alpha}|^2 + |\Gamma_{2\alpha}|^2 = |m_{\alpha\alpha}| \cosh(2(y - y_\alpha)), \quad (9)$$

$$\mathcal{M}_{2\alpha} - \mathcal{M}_{1\alpha} = |\Gamma_{1\alpha}|^2 - |\Gamma_{2\alpha}|^2 = |m_{\alpha\alpha}| \cos(2(x - x_\alpha)), \quad (10)$$

В то же время по определению: $\mathcal{M}_{i\alpha} = M_i |U_{i\alpha}|^2$. Для всех x, y :

$$|\mathcal{M}_{2\alpha} - \mathcal{M}_{1\alpha}| \leq |m_{\alpha\alpha}| \quad (11)$$

$$\mathcal{M}_{1\alpha} + \mathcal{M}_{2\alpha} \geq |m_{\alpha\alpha}| \quad (12)$$

Таким образом величина $|m_{\alpha\alpha}|$ является характерным масштабом, связывающим значения масс HNL и смешивания с флэйвором α .



2HNL: псевдовырожденное состояние

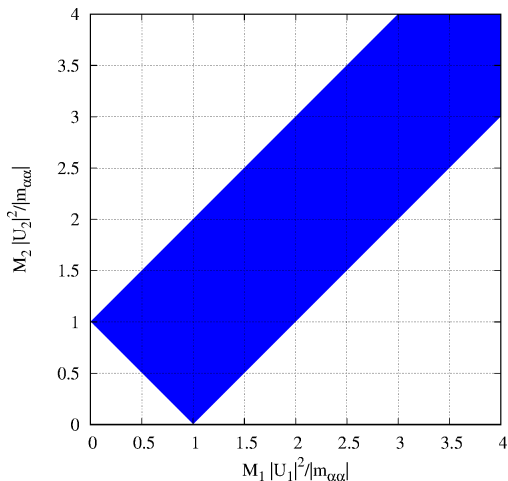


Рис. 3: Допустимый регион значений величин $M_{1\alpha}$ и $M_{2\alpha}$.



2HNL: псевдовырожденное состояние

Введём понятие псевдовырожденного состояния:

$$|\mathcal{M}_{2\alpha} - \mathcal{M}_{1\alpha}| \ll \mathcal{M}_{1\alpha} + \mathcal{M}_{2\alpha} \quad (13)$$

Для такого состояния справедливо: $\mathcal{M}_{1\alpha} \approx \mathcal{M}_{2\alpha}$. Для больших значений $\mathcal{M}_{i\alpha}$ условие выполняется автоматически:

$$\mathcal{M}_{1\alpha} + \mathcal{M}_{2\alpha} \gg |m_{\alpha\alpha}| \geq |\mathcal{M}_{2\alpha} - \mathcal{M}_{1\alpha}| \quad (14)$$

В этом пределе:

$$\frac{|U_{i,\alpha}|^2}{|U_{tot,i}|^2} = \frac{(|\lambda_{1\alpha}|^2 + |\lambda_{2\alpha}|^2 \mp 2\Im[\lambda_{1\alpha}^* \lambda_{2\alpha} e^{i\psi}])}{\sum_{j=1}^3 (|\lambda_{1j}|^2 + |\lambda_{2j}|^2 \mp 2\Im[\lambda_{1j}^* \lambda_{2j} e^{i\psi}])} \quad (15)$$

Таким образом значения смешивания с различными флэйворами оказываются связаны между собой и можно нарисовать характерные треугольные координатные карты $|U_{i,\alpha}|^2/|U_{tot,i}|^2$, где $|U_{tot,i}|^2 = |U_{ei}|^2 + |U_{\mu i}|^2 + |U_{\tau i}|^2$.



2HNL: псевдовырожденное состояние

В литературе (см., например, Ref. 1801.04207 и Ref. 2207.02742) изучался “симметричный предел”: $M_1 = M_2, |U_{\alpha 1}|^2 = |U_{\alpha 2}|^2$. Сравнивая формулы, можно убедиться что они повторяют друг друга.

Отличие псевдовырожденного состояния от симметричного предела

заключается в параметре $\kappa_i = \sqrt{1 - \frac{|m_{ee}|^2}{4 \mathcal{M}_{ie}^2}}$. Значение $\kappa = 1$

соответствует пределу (14)). Можно получить значения $\frac{|U_{i\alpha}|^2}{|U_{tot,i}|^2}$. Хотя они становятся более громоздкими, можно убедиться что при уменьшении параметра κ_i область допустимых значений уменьшается, а значит предел (14) полностью описывает область допустимых значений углов смешивания.



2HNL: псевдовырожденное состояние

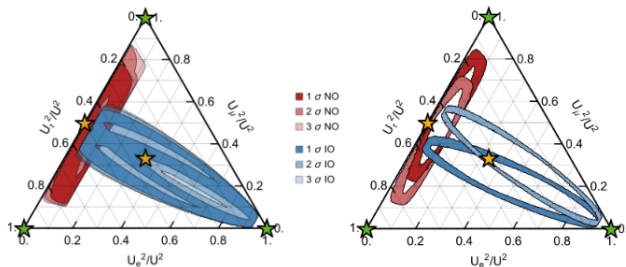


Figure 136: The allowed range of mixing ratios $U_e^2 : U_\mu^2 : U_\tau^2$ in the minimal seesaw model for NO (red) and IO (blue), compared with the new benchmarks 144 (yellow) and the old benchmarks 143 (green). **Left:** Contours indicating the range allowed by the current neutrino oscillation data [1472]. **Right:** For comparison we also include the future projection based of 15 years of data taking at DUNE [1493], assuming the true value of $\delta = -\pi/2$, and two benchmark values of the light neutrino mixing angle $s_{23}^2 \equiv \sin^2 \theta_{23} = 0.58$ (darker region) and $s_{23}^2 = 0.42$ (lighter regions). Comparable sensitivity can be expected at Hyper-K [1494, 1495]. Figures taken from [1471].

Рис. 4: Ref. 2305.01715 ссылающееся на Ref. 2207.02742.



2HNL: псевдовыврожденное состояние

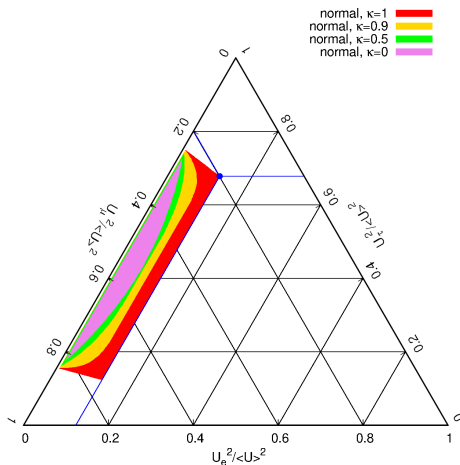


Рис. 5: Допустимые области ($|U_e|^2, |U_\mu|^2, |U_\tau|^2$) в пределе $|\mathcal{M}_2 - \mathcal{M}_1| \ll \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$ для нормальной иерархии.



2HNL: псевдовыврожденное состояние

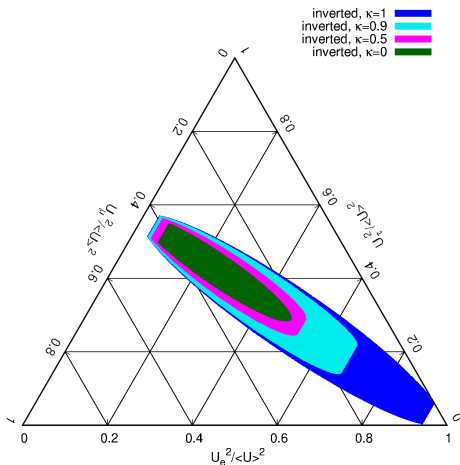


Рис. 6: Допустимые области ($|U_e|^2, |U_\mu|^2, |U_\tau|^2$) в пределе $|\mathcal{M}_{e2} - \mathcal{M}_{e1}| \ll \mathcal{M}_{e1} + \mathcal{M}_{e2}$ для обратной иерархии.



3HNL

Ситуация с тремя HNL аналогична ситуации с двумя HNL. Но теперь в активном секторе два новых параметра: масса легчайшего нейтрино и вторая майорановская CP-нарушающая фаза. В стерильном секторе становится три комплексного угла вместо одного.

Можно убедиться, что по форме ответ почти не меняется:

$$U_{sum,\alpha}^2 \equiv |U_{1\alpha}|^2 + |U_{2\alpha}|^2 + |U_{3\alpha}|^2 = \frac{1}{M_1} |\Gamma_{1\alpha}|^2 + \frac{1}{M_2} |\Gamma_{2\alpha}|^2 + \frac{1}{M_3} |\Gamma_{3\alpha}|^2 \quad (16)$$

$$U_{min,\alpha}^2 = \frac{|m_1 A_{1\alpha}^2 + m_2 A_{2\alpha}^2 + m_3 A_{3\alpha}^2|}{M_{max}} \equiv \frac{|m_{\alpha\alpha}|}{M_{max}} \quad (17)$$

Но теперь величина $|m_{\alpha\alpha}|$ существенно зависит от “нового” параметра $m_{lightest}$!



3HNL: минимальное смешивание

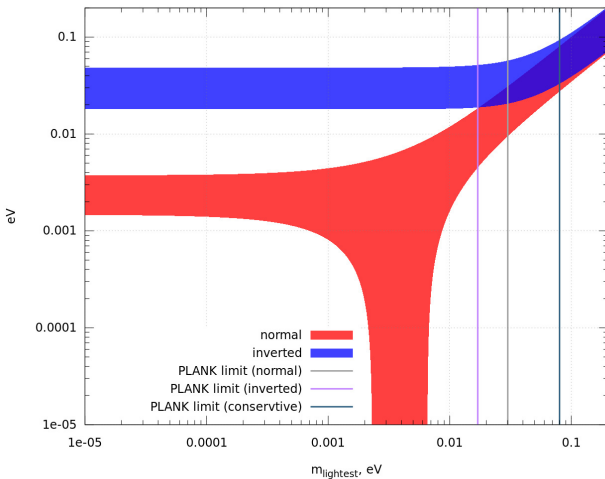


Рис. 7: Допустимые значения величины $|m_{ee}|$ как функции m_{lightest} .



3HNL: минимальное смешивание

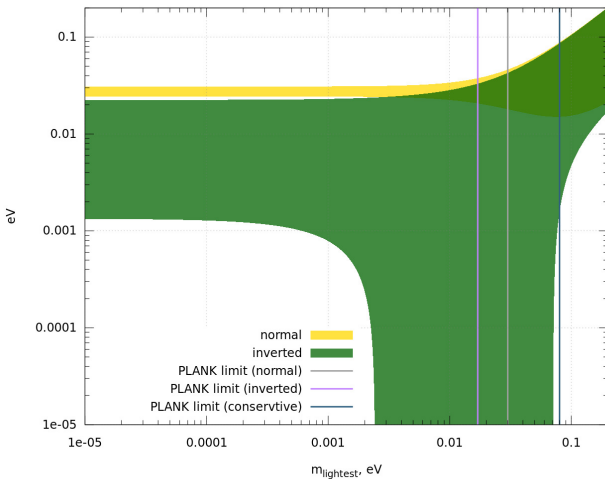


Рис. 8: Допустимые значения величины $|m_{\mu\mu}|$ как функции m_{lightest} .



3HNL: минимальное смешивание

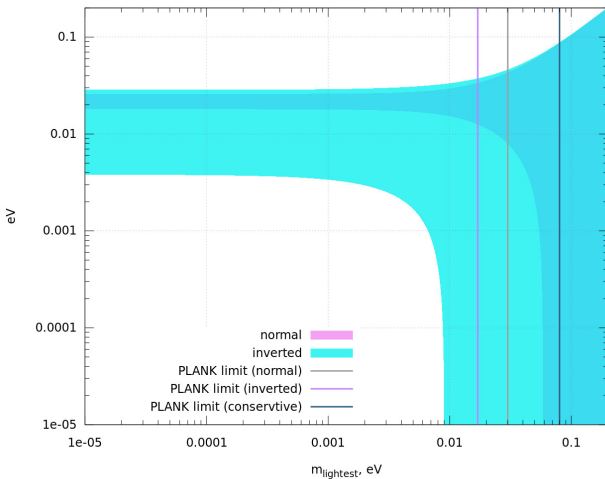


Рис. 9: Допустимые значения величины $|m_{\tau\tau}|$ как функции m_{lightest} .



3HNL: минимальное смешивание

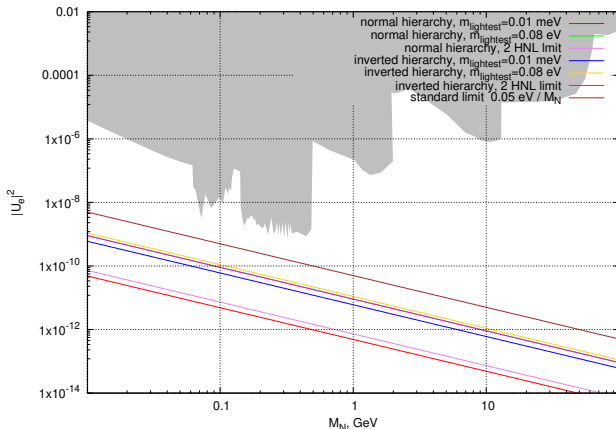


Рис. 10: Экспериментальные ограничения и наша оценка значения минимального смешивания в качельном механизме для разных значений $m_{lightest}$. Смешивание с электронным нейтрино. Коричневая линия отвечает стандартному пределу $\frac{0.05\text{eV}}{M_N}$.



3HNL: минимальное смешивание

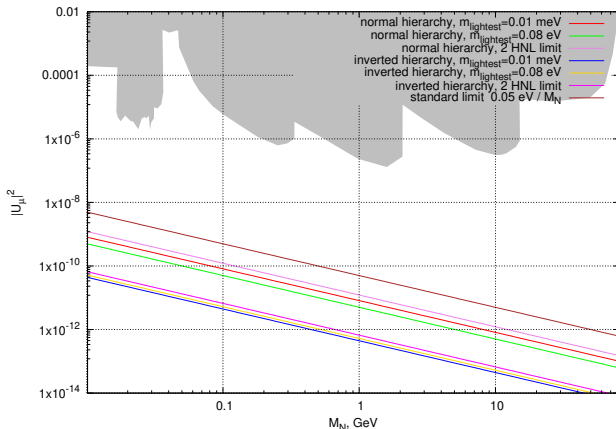


Рис. 11: Экспериментальные ограничения и наша оценка значения минимального смешивания в качельном механизме для разных значений m_{lightest} . Смешивание с мюонным нейтрино. Коричневая линия отвечает стандартному пределу $\frac{0.05\text{eV}}{M_N}$.



3HNL: минимальное смешивание

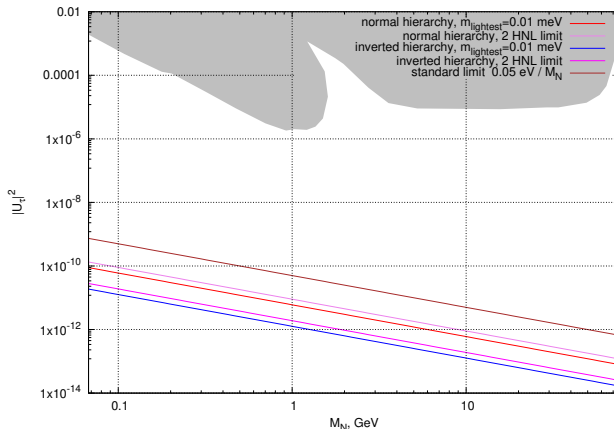


Рис. 12: Экспериментальные ограничения и наша оценка значения минимального смешивания в качельном механизме для разных значений m_{lightest} . Смешивание с тау-нейтрино. Коричневая линия отвечает стандартному пределу $\frac{0.05\text{eV}}{M_N}$.



3HNL: псевдовыврожденное состояние

Можно заметить:

$$\mathcal{M}_{3\alpha} + \mathcal{M}_{2\alpha} = |\Gamma_{1\alpha}^2 - m_{\alpha\alpha}| \cosh(2(y_3 - \hat{y}_\alpha)), \quad (18)$$

$$\mathcal{M}_{3\alpha} - \mathcal{M}_{2\alpha} = |\Gamma_{1\alpha}^2 - m_{\alpha\alpha}| \cos(2(x_3 - \hat{x}_\alpha)), \quad (19)$$

$$|\mathcal{M}_{1\alpha} - |m_{\alpha\alpha}|| \leq |\Gamma_{1\alpha}^2 - m_{\alpha\alpha}| \leq \mathcal{M}_{1\alpha} + |m_{\alpha\alpha}|, \quad (20)$$

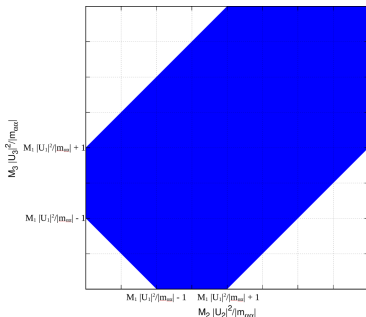


Рис. 13: Допустимые регионы величин $\mathcal{M}_{2\alpha}$ and $\mathcal{M}_{3\alpha}$.



3HNL: псевдовырожденное состояние

Псевдовырожденное состояние:

$$|\mathcal{M}_{3\alpha} - \mathcal{M}_{2\alpha}| \ll \mathcal{M}_{2\alpha} + \mathcal{M}_{3\alpha} \quad (21)$$

Это автоматически выполняется если $\cosh(2(y_3 - \hat{y}_\alpha)) \gg 1$ или $\cos(2(x_3 - \hat{x}_\alpha)) \ll 1$:

$$\mathcal{M}_{1\alpha} \ll \mathcal{M}_{3\alpha} + \mathcal{M}_{2\alpha}, |m_{\alpha\alpha}| \ll \mathcal{M}_{2\alpha} + \mathcal{M}_{3\alpha} \quad (22)$$

$$\mathcal{M}_{1\alpha} \gg |\mathcal{M}_{3\alpha} - \mathcal{M}_{2\alpha}|, |m_{\alpha\alpha}| \ll \mathcal{M}_{2\alpha} + \mathcal{M}_{3\alpha} \quad (23)$$

Изучим отношение $|U_e|^2 : |U_\mu|^2 : |U_\tau|^2$. Теперь оно зависит не только от параметров активного сектора, таких как $\delta, \alpha_1, \alpha_2$, но также и от комплексных углов z_1, z_2 связанных со значением $\mathcal{M}_{1\alpha}$:

$$\frac{|U_{i\alpha}|^2}{|U_{itot}|^2} = \frac{(|\lambda_{3\alpha}|^2 + |\Gamma_{4\alpha}|^2 \mp 2\Im[\lambda_{3\alpha}^* \Gamma_{4\alpha}])}{\sum_{j=1}^3 (|\lambda_{3j}|^2 + |\Gamma_{4j}|^2 \mp 2\Im[\lambda_{3j}^* \Gamma_{4j}])} \quad (24)$$



3HNL: псевдовырожденное состояние

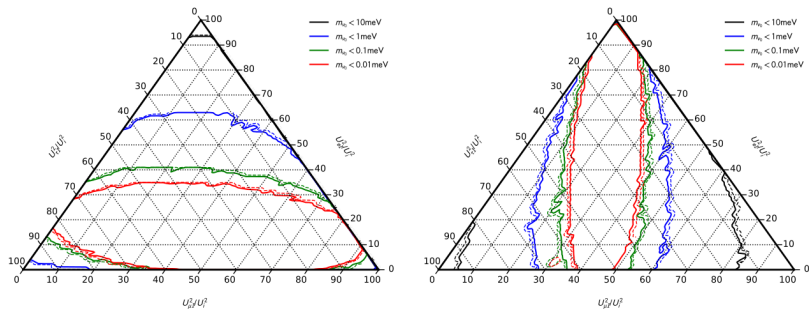


Fig. 11: $U_{\alpha I}^2/U_I^2$ (in percent) for different upper limits of m_{ν_0} (see legend). Solid (dashed) lines delineate the 1σ (2σ) contours, for normal (left) and inverted hierarchy (right). As discussed in footnote 12, these constraints apply to those heavy neutrinos that can be found experimentally.

Рис. 14: Ref. 1908.02302.



3HNL: псевдовырожденное состояние

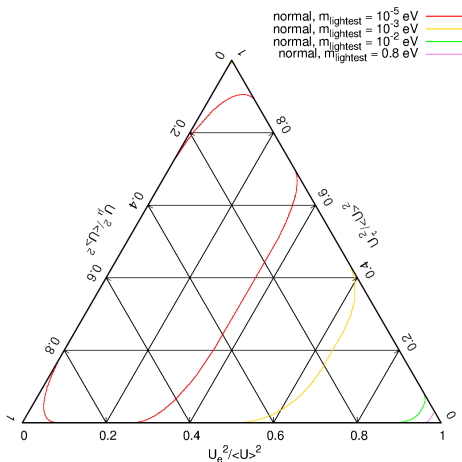


Рис. 15: Допустимые регионы ($|U_e|^2, |U_\mu|^2, |U_\tau|^2$) в псевдовырожденном состоянии для нормальной иерархии.



3HNL: псевдовырожденное состояние

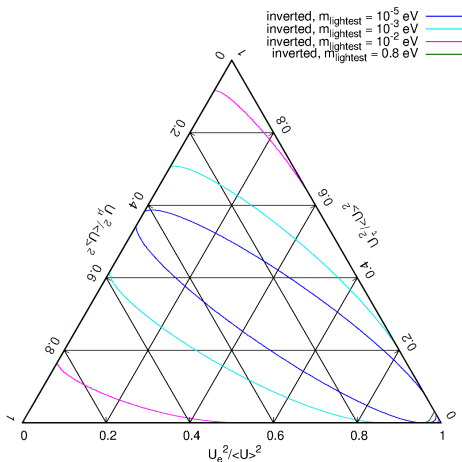


Рис. 16: Допустимые регионы ($|U_e|^2, |U_\mu|^2, |U_\tau|^2$) в псевдовырожденном состоянии для обратной иерархии.



Заключение

- Был найдено минимальное значение угла смешивания $U_{\alpha i_{min}} = \frac{|m_{\alpha\alpha}|}{M_i}$ для случая двух и трёх тяжёлых нейтральных лептонов. Полученные значения, как и ожидалось, лежат значительно ниже примерной оценки принятой в литературе.
- Если значения смешивания лежат значительно выше этого предела, то реализуется псевдовырожденное состояние в котором значения масс и углов смешивания сильно связаны друг с другом.
- Это связь выражается формулами уже полученными в литературе для симметричного предела, являющегося частным случаем псевдовырожденного состояния. Многие результаты полученные для симметричного предела могут быть безболезненно перенесены на более общий случай псевдовырожденного состояния.
- Каждый тяжёлый нейтральный мезон с большой долей вероятности будет иметь хоть немного, но отличное от нуля значение смешивания хотя бы с двумя флэйворами.



Спасибо за внимание!



Mass hierarchy

For the normal hierarchy we have:

$$\begin{aligned}m_1 &= m_{\text{lightest}} \\m_2 &= \sqrt{m_{\text{lightest}}^2 + \Delta m_{21}^2} \\m_3 &= \sqrt{m_{\text{lightest}}^2 + \Delta m_{21}^2 + |\Delta m_{32}^2|},\end{aligned}$$

and for the inverted hierarchy:

$$\begin{aligned}m_3 &= m_{\text{lightest}} \\m_1 &= \sqrt{m_{\text{lightest}}^2 - \Delta m_{21}^2 + |\Delta m_{32}^2|} \\m_2 &= \sqrt{m_{\text{lightest}}^2 + |\Delta m_{32}^2|}.\end{aligned}$$



U_{PMNS}

Of utmost importance is mixing angle that describes the relation of flavour basis to mass basis described using Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata matrix U_{PMNS} :

$$\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\alpha_1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\alpha_2}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} U_{PMNS}^\dagger \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}, \quad (25)$$

$$U_{PMNS}^\dagger = \begin{pmatrix} c_{13}c_{12} & -c_{23}s_{12} - s_{23}s_{13}c_{12}e^{-i\delta} & s_{23}s_{12} - c_{23}s_{13}c_{12}e^{-i\delta} \\ c_{13}s_{12} & c_{23}c_{12} - s_{23}s_{13}s_{12}e^{-i\delta} & -s_{23}c_{12} - c_{23}s_{13}s_{12}e^{-i\delta} \\ s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}, \quad (26)$$

where c_{ij} and s_{ij} stand for $\cos \theta_{ij}$ and $\sin \theta_{ij}$, with $i, j = 1, 2, 3, i < j$.



3 HNLs

$$U = i \times \text{diag}\{\pm 1, \pm 1, \pm 1\} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{M_1}}\Gamma_{11} & \frac{1}{\sqrt{M_1}}\Gamma_{12} & \frac{1}{\sqrt{M_1}}\Gamma_{13} \\ \frac{1}{\sqrt{M_2}}\Gamma_{21} & \frac{1}{\sqrt{M_2}}\Gamma_{22} & \frac{1}{\sqrt{M_2}}\Gamma_{23} \\ \frac{1}{\sqrt{M_3}}\Gamma_{31} & \frac{1}{\sqrt{M_3}}\Gamma_{32} & \frac{1}{\sqrt{M_3}}\Gamma_{33} \end{pmatrix} \quad (27)$$

$$A \equiv \text{diag}\{e^{i\frac{\alpha_1}{2}}; e^{i\frac{\alpha_2}{2}}; 1\} \times U_{PMNS}^\dagger \quad (28)$$

$$\lambda_{1i} \equiv \sqrt{m_1}A_{1i}c_1 + \sqrt{m_2}A_{2i}s_1 \quad (29)$$

$$\lambda_{2i} \equiv \sqrt{m_3}A_{3i} \quad (30)$$

$$\lambda_{3i} \equiv -\sqrt{m_1}A_{1i}s_1 + \sqrt{m_2}A_{2i}c_1 \quad (31)$$

$$\Gamma_{1i} \equiv \lambda_{1i}c_2 + \lambda_{2i}s_2 \quad (32)$$

$$\Gamma_{4i} \equiv \lambda_{2i}c_2 - \lambda_{1i}s_2 \quad (33)$$

$$\Gamma_{2i} \equiv \lambda_{3i}c_3 + \Gamma_{4i}s_3 \quad (34)$$

$$\Gamma_{3i} \equiv \Gamma_{4i}c_3 - \lambda_{3i}s_3 \quad (35)$$

Overall, we have **10 unknown real parameters**.

