



К квантовому  
теоретико-полевому описанию  
осцилляций нейтрино

И. Волобуев, В. Егоров (НИИЯФ МГУ)

# Введение

Стандартная модель способна с высокой точностью описывать огромное количество разнообразных процессов взаимодействия элементарных частиц в рамках пертурбативного формализма  $S$ -матрицы, и результаты теоретического описания в подавляющем большинстве случаев замечательно подтверждаются экспериментальными данными.

Однако существует ряд явлений, которые невозможно описать в рамках стандартной теории возмущений.

В частности, это явления осцилляции нейтральных мезонов и нейтрино, происходящие на макроскопических интервалах пространства и времени. Осцилляции нейтрино это хорошо известное и экспериментально подтвержденное явление, которое обычно понимается как переход из состояния нейтрино одного аромата в состояние нейтрино другого аромата в зависимости от пройденного расстояния.

S. Bilenky, "Introduction to the physics of massive and mixed neutrinos,"  
Lecture Notes in Physics **817** (2010) 1.

Однако стандартное теоретическое описание нейтринных осцилляций является непоследовательным, поскольку флейворные состояния нейтрино плохо определены.

В соответствии с квантовым принципом суперпозиции

$$|\psi\rangle = \alpha |\psi_1\rangle + \beta |\psi_2\rangle, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C},$$

если  $|\psi_1\rangle$  и  $|\psi_2\rangle$  состояния одной и той же квантовой системы, т.е. их эволюция во времени описывается одним и тем же гамильтонианом

$$|\psi_1(t)\rangle = e^{-iHt} |\psi_1\rangle, \quad |\psi_2(t)\rangle = e^{-iHt} |\psi_2\rangle.$$

Очевидно, что для состояний нейтрино с определенной массой это условие не выполняется.

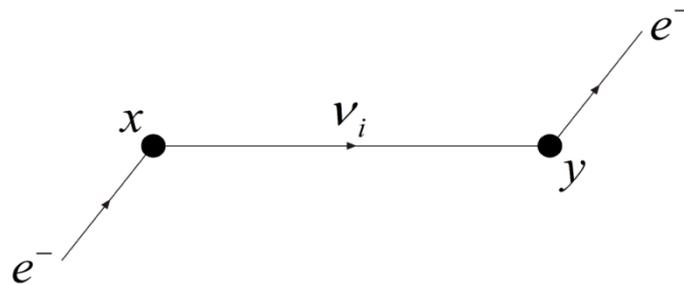
Противоречивость описания осцилляций нейтрино в терминах флейворных состояний неоднократно обсуждалась в литературе:

- C. Giunti, C.W. Kim, J.A. Lee and U.W. Lee, "On the treatment of neutrino oscillations without resort to weak eigenstates," Phys. Rev. D **48** (1993) 4310,
- W. Grimus and P. Stockinger, "Real oscillations of virtual neutrinos," Phys. Rev. D **54** (1996) 3414,
- A.E. Lobanov, "Particle quantum states with indefinite mass and neutrino oscillations," Annals Phys. **403** (2019) 82.

Описание осцилляций нейтрино в рамках квантовой теории поля и S-матричного подхода впервые было предложено в работе

- И.Ю. Кобзарев, Б.В. Мартемьянов, Л.Б. Окунь, М.Г. Щепкин, "Правила сумм в нейтринных осцилляциях," ЯФ, т. 35 (1982) 1210.

Авторы рассмотрели процесс, в котором заряженный лептон рождает состояние нейтрино с определенной массой на бесконечно тяжелом ядре, а затем нейтрино рождает заряженный лептон на другом бесконечно тяжелом ядре.



Начальный и конечный лептоны описывались плоскими волнами, тогда как матричные элементы заряженных слабых адронных токов ядер считались пропорциональными дельта-функциям от их координат.

При вычислении матричного элемента процесса получалось выражение

$$S^c(\mathbf{p}, \vec{n}, L) = \int d\mathbf{z} e^{i\mathbf{p}\mathbf{z}} S^c(\mathbf{z}) \delta(\vec{\mathbf{z}} - \vec{n}L),$$

которое мы называем зависящим от расстояния пропагатором виртуального нейтрино. Интеграл можно вычислить точно, и результат получается равным

$$S^c(\mathbf{p}, \vec{n}, L) = \frac{e^{-i\vec{p}\vec{n}L}}{4\pi L} \left( \gamma^0 \mathbf{p}^0 - \vec{\gamma}\vec{n} \left( \mathbf{p}_{ms} + \frac{\mathbf{i}}{L} \right) + m \right) e^{i\mathbf{p}_{ms}L},$$

$$\mathbf{p}_{ms} = \sqrt{(\mathbf{p}^0)^2 - m^2}.$$

В этом подходе рожденные нейтрино находятся вне массовой поверхности и описываются стандартными фейнмановскими пропагаторами в координатном представлении.

В импульсном представлении появляются зависящие от расстояния пропагаторы виртуальных нейтрино.

Осцилляции нейтрино теперь становятся обычным интерференционным процессом.

Входящие и исходящие лептоны описываются плоскими волнами, тогда как положения ядер фиксируются дельта-функциями, что является довольно грубым приближением, приводящим к нарушению закона сохранения импульса.

Эта идея (без ссылки на работу Кобзарева и соавторов) была развита в работе

■ С. Giunti, C.W. Kim, J.A. Lee and U.W. Lee,  
“On the treatment of neutrino oscillations without  
resort to weak eigenstates,”  
Phys. Rev. D **48** (1993) 4310.

В этой работе локализация входящих и исходящих частиц или ядер описывается с помощью волновых пакетов, что сильно усложняет расчеты амплитуд.

Причина заключается в том, что

Стандартный формализм  $S$ -матрицы не приспособлен для описания процессов, происходящих на конечных расстояниях и длящихся конечные промежутки времени.

# Модифицированный формализм

Мы предлагаем модификацию пертурбативного формализма, которая позволяет описывать процессы, протекающие на конечных расстояниях за конечные промежутки времени. Подход основан на технике диаграмм Фейнмана в координатном представлении, дополненной модифицированными правилами перехода к импульсному представлению. Последние отражают геометрию экспериментов по нейтринным осцилляциям и приводят к модификации фейнмановских пропагаторов массовых состояний нейтрино в импульсном представлении.

Идея подхода подсказана работой

- R.P. Feynman, "Space-Time Approach to Quantum Electrodynamics," Phys. Rev. **76** (1949), 769.

и впервые была изложена в работе

- Igor P. Volobuev, "Quantum field-theoretical description of neutrino and neutral kaon oscillations ," Int. J. Mod. Phys. A **33** (2018) no.13, 1850075

История публикации этой работы кратко описана в недавней работе

- Maxim Libanov, "Toward a quantum field-theoretical description of oscillation effects ," Int. J. Mod. Phys. A **39** (2024) no.34, 2445002

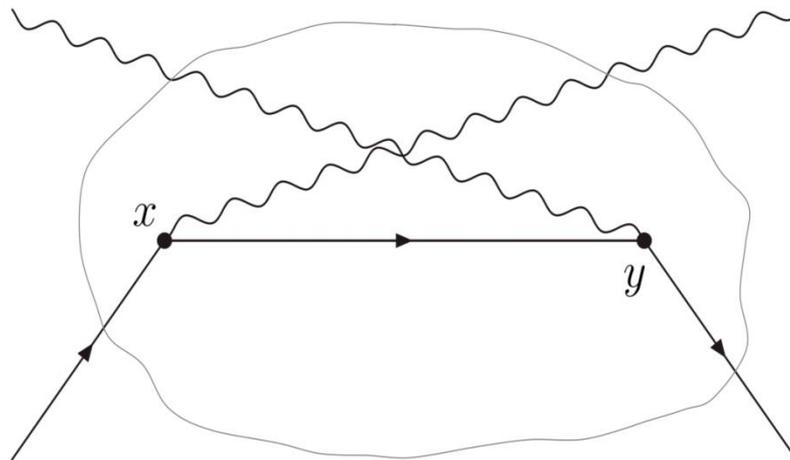
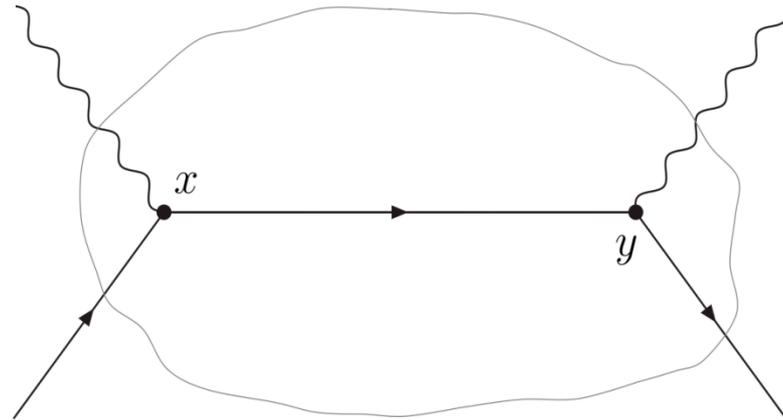
Дальнейшее развитие этот подход получил в работах

- V.O. Egorov and I.P. Volobuev, Phys. Rev. D **97** (2018) no.9, 093002,
- И.П. Волобуев и В.О. Егоров, ТМФ **199** (2019), №1, с. 104,
- И.П. Волобуев и В.О. Егоров, ЖЭТФ **155** (2019), №5, с. 839,
- V.O. Egorov and I.P. Volobuev, Phys. Rev. D **100** (2019) no.3, 033004,
- В.О. Егоров и И.П. Волобуев, ЖЭТФ **162** (2022), №2, с. 226.

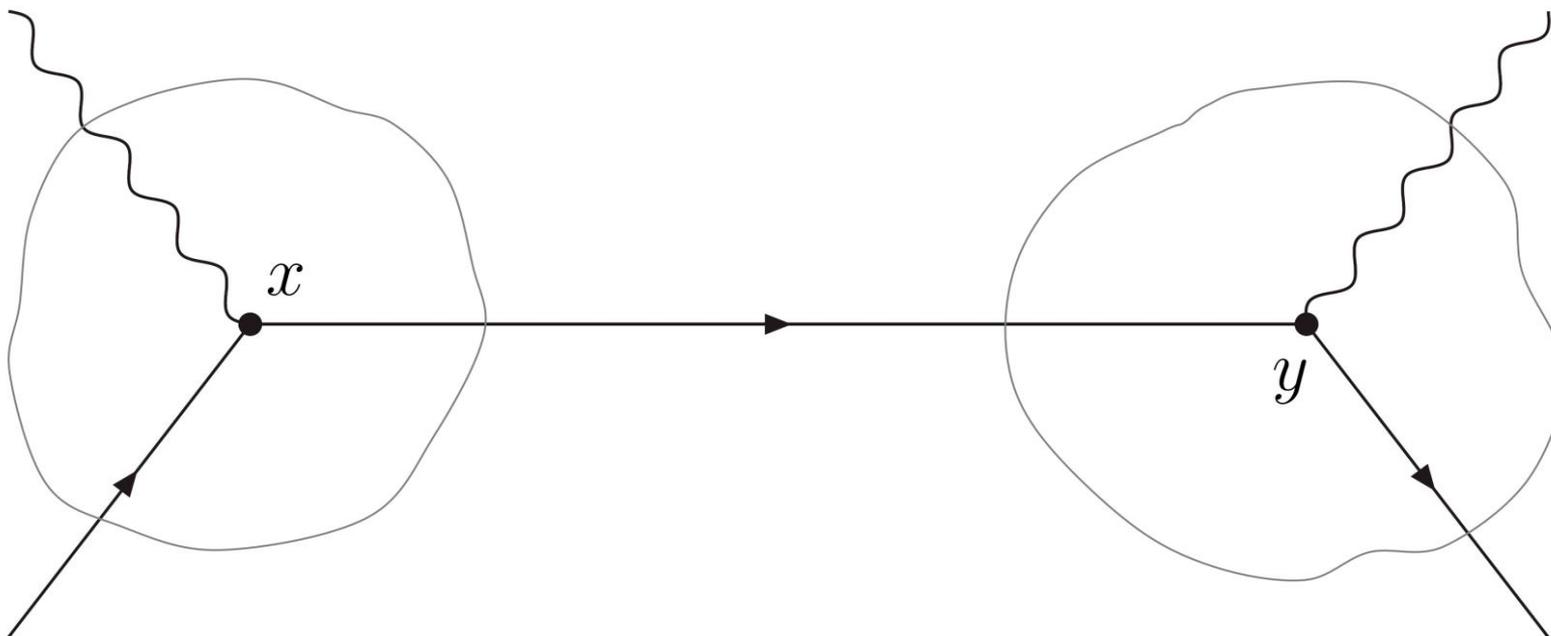
Современный пертурбативный формализм S-матрицы и диаграммная техника были сформулированы в работах

- F.J. Dyson, "The S-matrix in quantum electrodynamics,"  
Phys. Rev. **75** (1949) 1736,
- R.P. Feynman, "Space-Time Approach to Quantum Electrodynamics,"  
Phys. Rev. **76** (1949), 769.  
(Pocono conference 1948)

# Стандартный процесс рассеяния

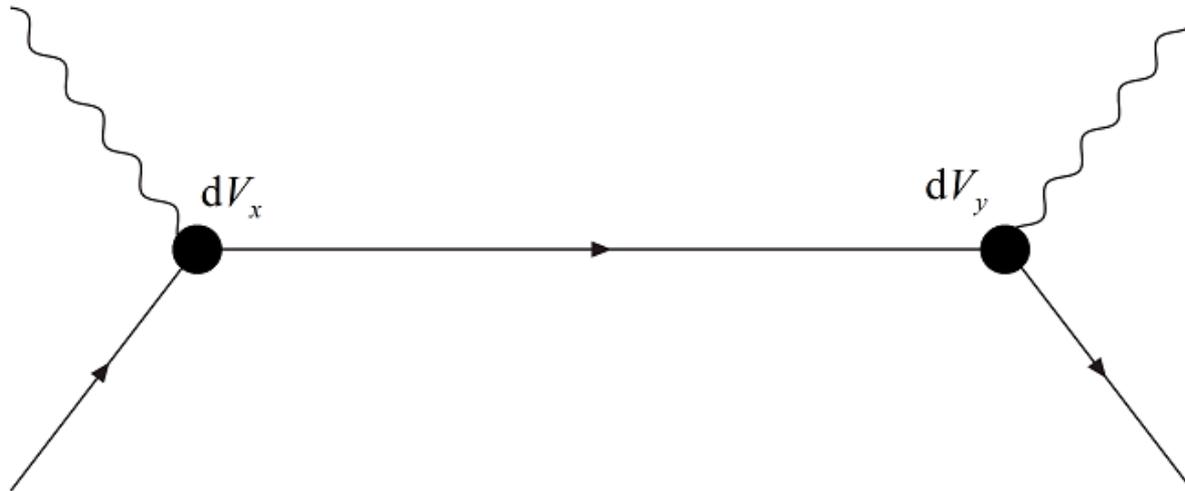


# Процесс рассеяния в экспериментах по осцилляциям нейтрино



# Зависящие от расстояния пропагаторы

Чтобы учесть геометрию эксперимента, необходимо провести интегрирование по координатам  $x$  и  $y$  таким образом, чтобы расстояние между точками  $x$  и  $y$  вдоль единичного вектора  $\vec{n}$ , направленного от источника к детектору, было фиксировано и равно  $L$ .



Этого можно достичь, введя в подынтегральное выражение дельта-функцию  $\delta((\vec{y} - \vec{x})\vec{n} - L)$ . Формально это эквивалентно замене стандартного фермионного фейнмановского пропагатора  $S^c(y - x)$  на  $S^c(y - x)\delta((\vec{y} - \vec{x})\vec{n} - L)$ .

Преобразование Фурье этого произведения называется зависящим от расстояния фермионным пропагатором в импульсном представлении:

$$S^c(p, \vec{n}, L) = \int dz e^{ipz} S^c(z)\delta(\vec{n}\vec{z} - L).$$

Этот интеграл может быть вычислен точно:

$$S^c(\mathbf{p}, \vec{n}, L) = i \frac{\hat{\mathbf{p}} + \vec{\gamma} \vec{n} \left( \vec{p} \vec{n} - \sqrt{(\vec{p} \vec{n})^2 + p^2 - m^2} \right) + m}{2\sqrt{(\vec{p} \vec{n})^2 + p^2 - m^2}} e^{-i \left( \vec{p} \vec{n} - \sqrt{(\vec{p} \vec{n})^2 + p^2 - m^2} \right) L},$$

В дальнейшем мы полагаем, что  $\vec{p} \vec{n} \sim |\vec{p}|$ .

В работе

■ W. Grimus and P. Stockinger, "Real oscillations of virtual neutrinos," Phys. Rev. D **54** (1996) 3414

было строго доказано, что частицы, распространяющиеся на макроскопические расстояния, находятся почти на массовой оболочке, т.е. для таких частиц

$$\left| p^2 - m^2 \right| / (\vec{p}\vec{n})^2 \ll 1.$$

В этом приближении мы получаем зависящий от расстояния пропагатор в простой форме:

$$S^c(\mathbf{p}, \vec{n}, L) = i \frac{\hat{\mathbf{p}} + \mathbf{m}}{2\vec{p}\vec{n}} e^{i \frac{p^2 - m^2}{2\vec{p}\vec{n}} L}.$$

Зависящий от расстояния пропагатор в работе Кобзарева и соавторов

$$S^c(\mathbf{z}) \rightarrow S^c(\mathbf{z})\delta(\vec{\mathbf{z}} - \vec{\mathbf{n}}L).$$

Для частиц почти на массовой поверхности

$$S^c(\mathbf{p}, \vec{\mathbf{n}}, L) = \frac{e^{-i\vec{\mathbf{p}}\vec{\mathbf{n}}L}}{4\pi L} (\gamma^0 \mathbf{p}^0 - \vec{\gamma}\vec{\mathbf{n}}(\mathbf{p}_{ms} + \frac{\mathbf{i}}{L}) + m) e^{i\mathbf{p}_{ms}L}$$

$$\simeq \frac{\hat{\mathbf{p}} + m}{4\pi L} e^{i\frac{\mathbf{p}^2 - m^2}{2\vec{\mathbf{p}}\vec{\mathbf{n}}}L}.$$

Можно рассмотреть также зависящий от времени пропагатор

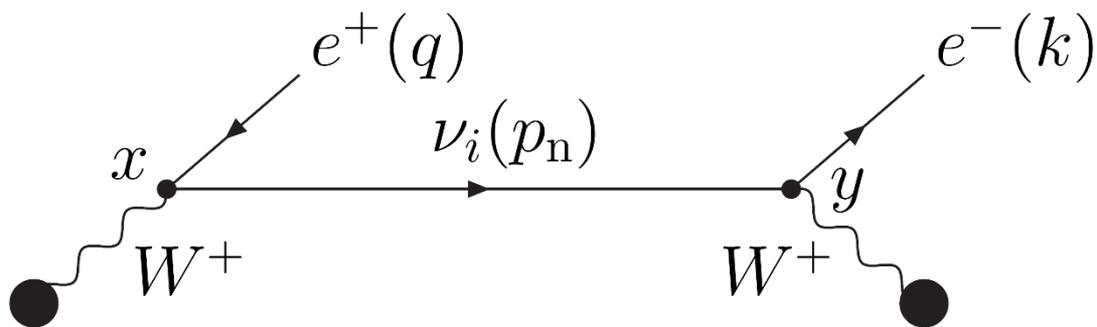
$$S^c(\mathbf{z}) \rightarrow S^c(\mathbf{z})\delta(\mathbf{z}^0 - T), \quad S^c(\mathbf{p}, T) = i \frac{\hat{\mathbf{p}} + m}{2p^0} e^{i\frac{\mathbf{p}^2 - m^2}{2p^0}T}.$$

# Осцилляции нейтрино в вакууме

Лагранжиан минимального расширения СМ  
правыми нейтрино:

$$\begin{aligned}
 L_{\text{int}}^{\text{lep}} = & - \frac{g}{2\sqrt{2}} \left( \sum_{i,k=1}^3 \bar{l}_i \gamma^\mu (1 - \gamma^5) U_{ik} \nu_k W_\mu^- + \text{h.c.} \right) + \\
 & + \frac{g \sin^2 \theta_w}{\cos \theta_w} \sum_{i=1}^3 \bar{l}_i \gamma^\mu l_i Z_\mu - \frac{g}{4 \cos \theta_w} \sum_{i=1}^3 \bar{l}_i \gamma^\mu (1 - \gamma^5) l_i Z_\mu + \\
 & + \frac{g}{4 \cos \theta_w} \sum_{k=1}^3 \bar{\nu}_k \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \nu_k Z_\mu .
 \end{aligned}$$

# Процесс с рождением и детектированием нейтрино через заряженные токи



Амплитуда процесса в импульсном представлении для  $\vec{n}(\vec{y} - \vec{x}) = L$  в приближении нулевых масс нейтрино (везде, кроме экспоненты)

$$M = -i \frac{G_F^2}{4 \vec{p}_n \vec{n}} \left( \sum_{i=1}^3 |U_{1i}|^2 e^{-i \frac{m_i^2 - p_n^2}{2 \vec{p}_n \vec{n}} L} \right) J_\rho^{(2)}(\vec{P}^{(2)}, \vec{P}^{(2')}) \times \\ \times \bar{u}(\vec{k}) \gamma^\rho (1 - \gamma^5) \hat{p}_n \gamma^\mu (1 - \gamma^5) v(\vec{q}) J_\mu^{(1)}(\vec{P}^{(1)}, \vec{P}^{(1')}).$$

Амплитуда представляет собой сумму трех членов, интерференция которых и приводит к возникновению осцилляций нейтрино.

В приближении нулевых масс нейтрино квадратированная амплитуда, просуммированная по поляризациям частиц, факторизуется:

$$\langle |M|^2 \rangle = \langle |M_P|^2 \rangle \langle |M_D|^2 \rangle \frac{1}{4(\vec{p}_n \cdot \vec{n})^2} \left[ 1 - 4 \sum_{\substack{i,k=1 \\ i>k}}^3 |U_{1i}|^2 |U_{1k}|^2 \sin^2 \left( \frac{\Delta m_{ik}^2 L}{4\vec{p}_n \cdot \vec{n}} \right) \right].$$

Production process
Detection process

$\Delta m_{ik}^2 = m_i^2 - m_k^2$

Чтобы найти соответствующую дифференциальную вероятность, нам нужно умножить квадрат амплитуды на дельта-функцию

$(2\pi)^4 \delta(P^{(1)} + P^{(2)} - P^{(1')} - q - P^{(2')} - k)$  сохранения энергии-импульса и  $4\pi \delta(p_n - p) \theta(p^0) \delta(p^2)$  где  $\vec{p} = |\vec{p}| \vec{n}$ , т.е. направлен от источника к детектору, а затем проинтегрировать по импульсам конечных частиц, ядер,  $p^0$  и  $|\vec{p}|$ .

В результате интегрирования по импульсам частиц и ядер получим:

$$\frac{dW}{d^3p} = \frac{d^3W_P}{d^3p} W_D \underbrace{\left[ 1 - 4 \sum_{\substack{i,k=1 \\ i>k}}^3 |U_{1i}|^2 |U_{1k}|^2 \sin^2 \left( \frac{\Delta m_{ik}^2}{4|\vec{p}|} L \right) \right]}_{P_{ee}(|\vec{p}|, L)}. \quad (\vec{p}\vec{n} = |\vec{p}|)$$

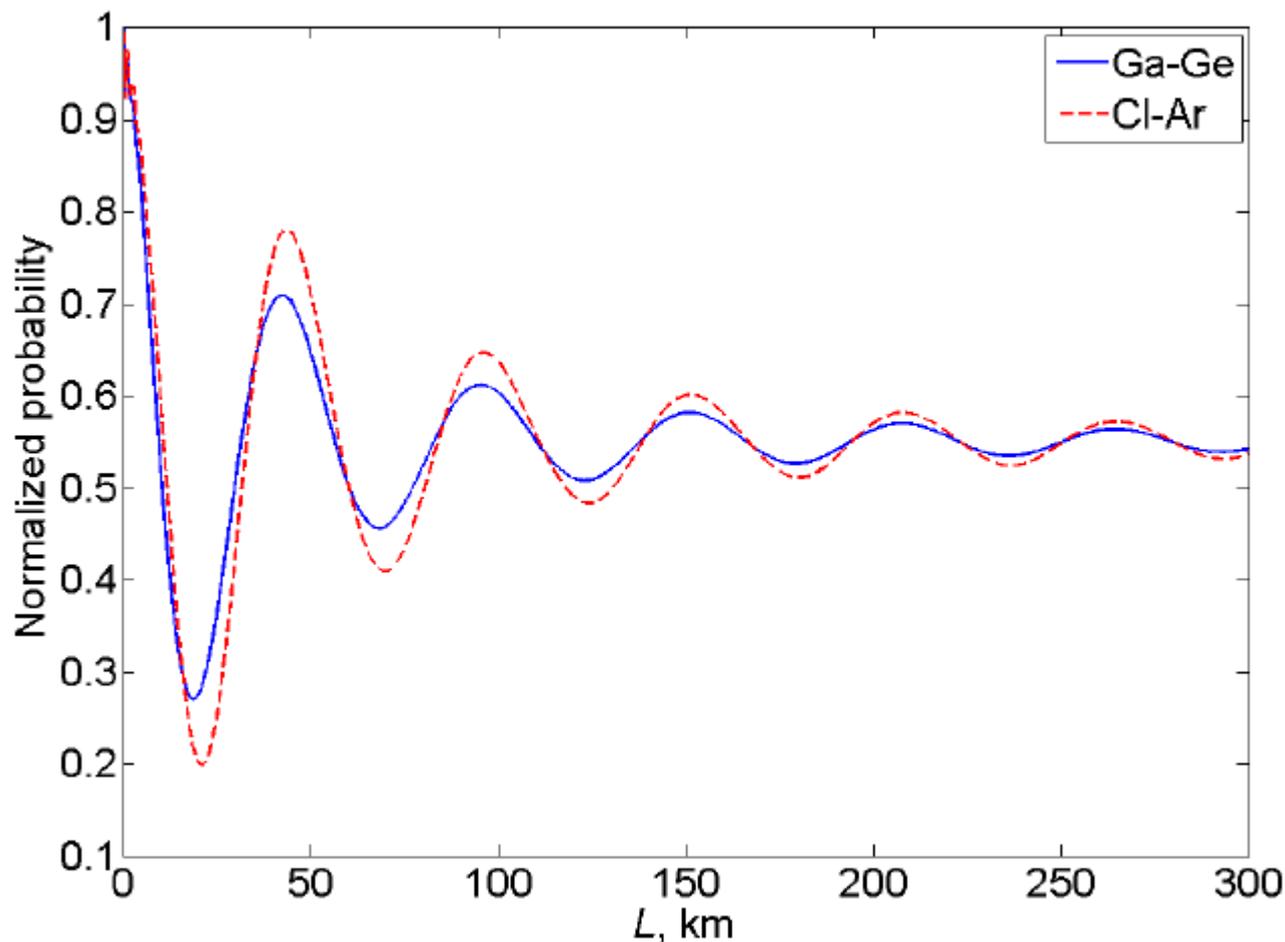
Probability of  $\nu(\vec{p})$  production  $\uparrow$

$P_{ee}(|\vec{p}|, L)$  is the standard oscillating factor

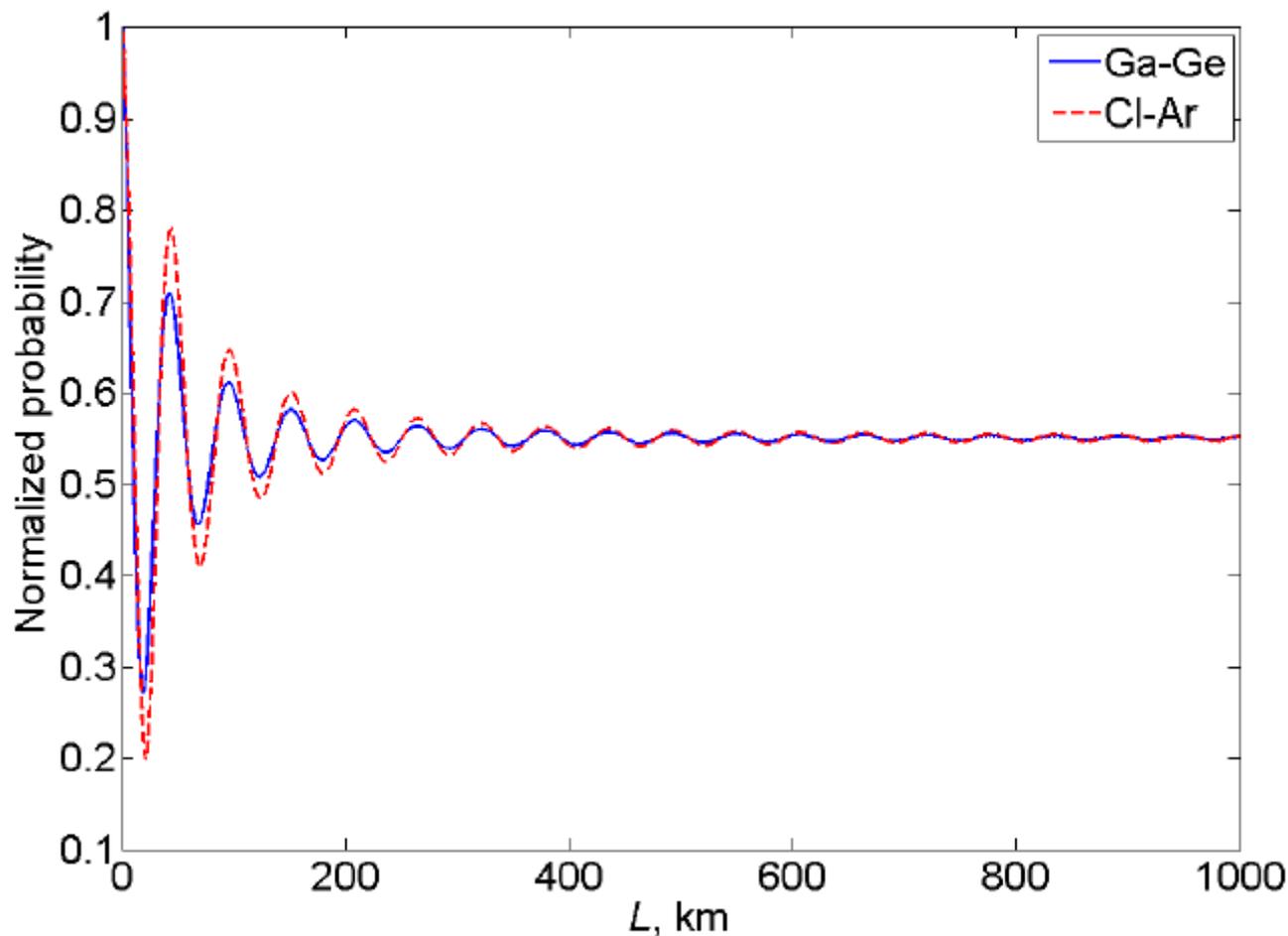
Наконец, для нахождения вероятности детектирования электрона мы должны умножить правую часть этого выражения на  $2\theta(p^0)\delta(p^2)$  и проинтегрировать по  $p^0$  и  $|\vec{p}|$ :

$$\frac{dW}{d\Omega} = \int_{|\vec{p}|_{\min}}^{|\vec{p}|_{\max}} \frac{d^3W_P}{d^3p} W_D P_{ee}(|\vec{p}|, L) |\vec{p}| d|\vec{p}|.$$

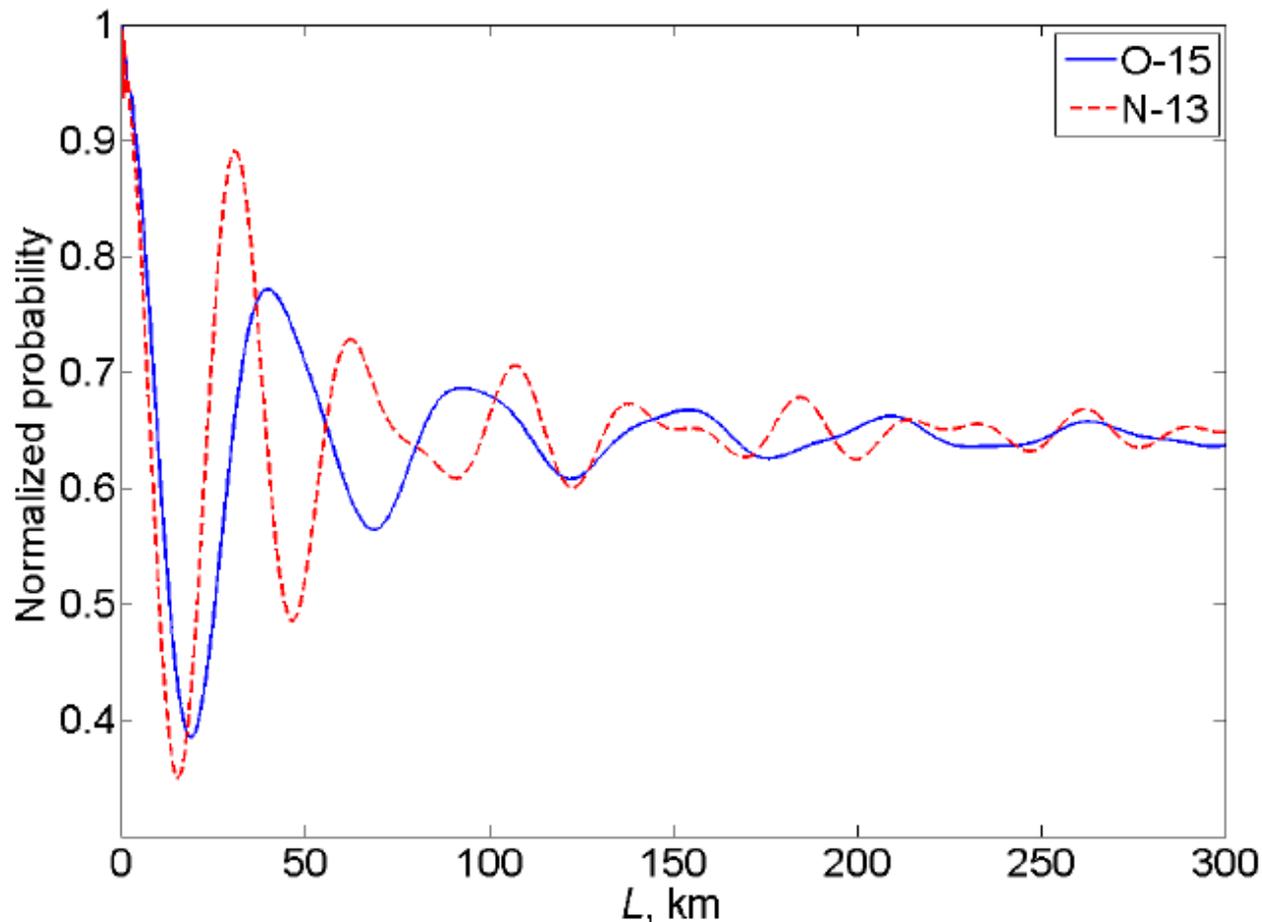
Нормированные вероятности процессов осцилляции нейтрино с рождением нейтрино в распаде  $^{15}\text{O}$  и регистрацией Cl-Ar и Ga-Ge детекторами.



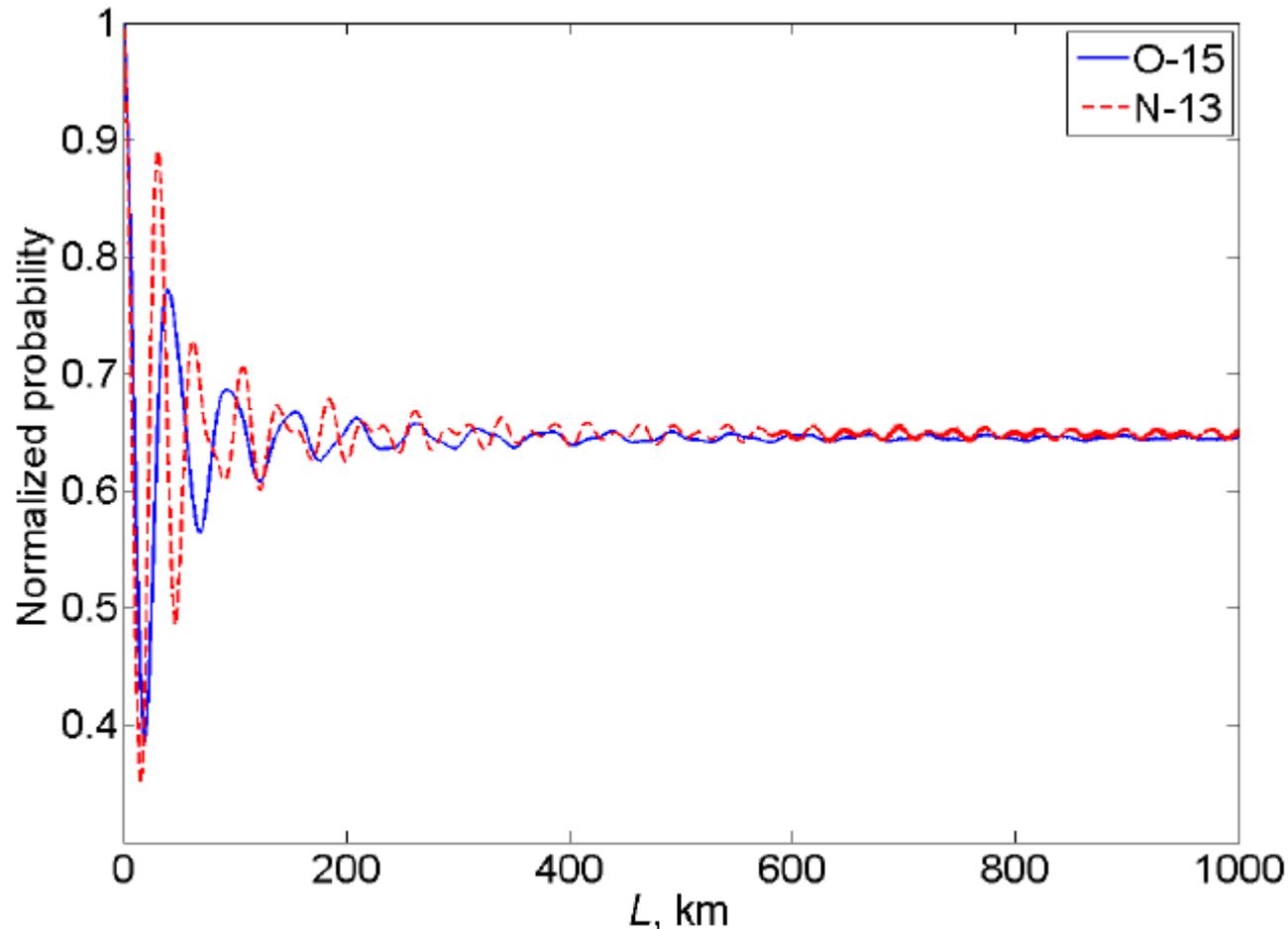
Нормированные вероятности процессов осцилляции нейтрино с рождением нейтрино в распаде  $^{15}\text{O}$  и регистрацией Cl-Ar и Ga-Ge детекторами.



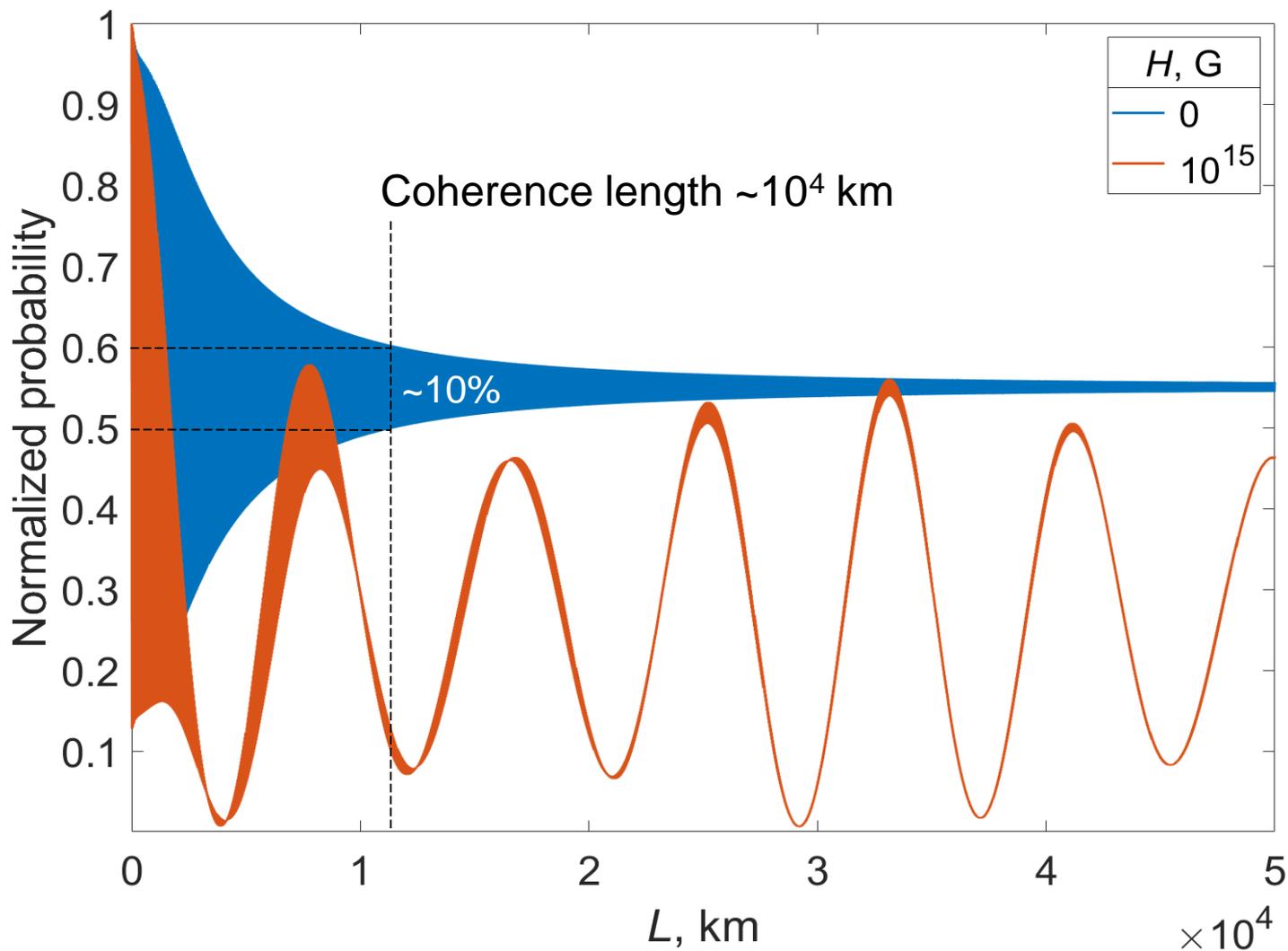
Нормированная вероятность процесса осцилляции нейтрино с рождением нейтрино в распадах  $^{15}\text{O}$  и  $^{13}\text{N}$  и регистрацией черенковским водным детектором.



Нормированная вероятность процесса осцилляции нейтрино с рождением нейтрино в распадах  $^{15}\text{O}$  и  $^{13}\text{N}$  и регистрацией черенковским водным детектором.



Нормированные вероятности процессов осцилляции нейтрино в магнитном поле с рождением нейтрино в процессе  ${}^7\text{Be} + e^- \rightarrow {}^7\text{Li} + \nu_i$  и регистрацией детектором Cl-Ar.



# Заключение

- Показано, что Стандартная модель способна описывать осцилляции нейтрино в рамках модифицированного пертурбативного квантового теоретико-полевого формализма, основанного на использовании зависящих от расстояния пропагаторов.
- Подход правильно воспроизводит результаты стандартного описания осцилляций нейтрино в вакууме и магнитном поле. В отличие от стандартного подхода он позволяет вычислять поправки к амплитудам процессов осцилляций нейтрино при низких энергиях нейтрино.

- В подходе используются только массовые состояния нейтрино, в то время как флейворные состояния оказываются ненужными и должны быть ампутированы бритвой Оккама.
- Преимуществами подхода являются его физическая ясность, большое сходство со стандартной техникой диаграмм Фейнмана и техническая простота благодаря использованию только плоских волн.

**Спасибо за внимание!**