

ИТМО



Динамика закрученных электронов в однородном  
нестационарном магнитном поле

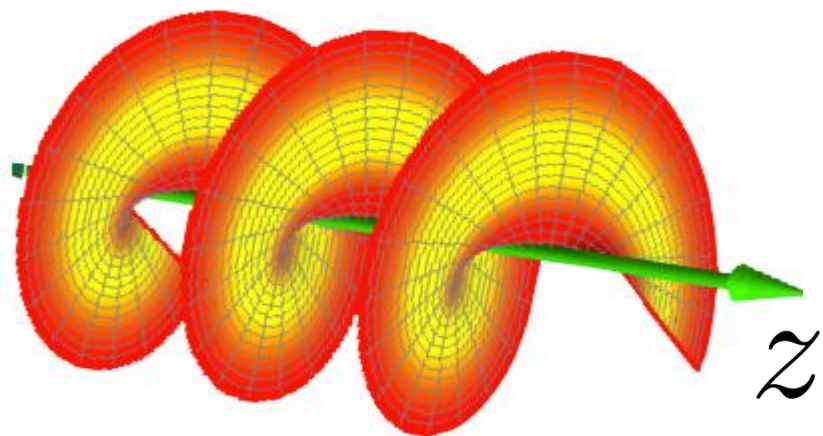
Собственные состояния в асимметричном стационарном  
магнитном поле

Наталья Филина, Стас Батурин

Сессия-конференция «Физика фундаментальных взаимодействий»

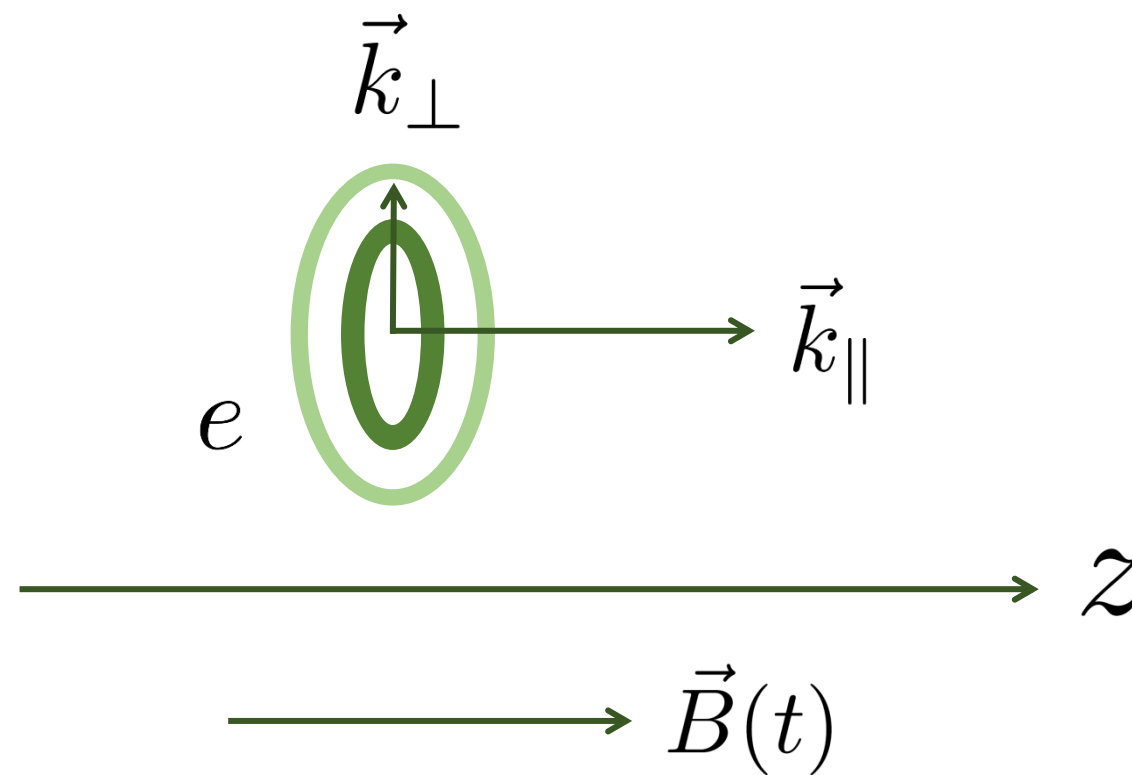
17 февраля 2025

## Поверхность постоянной фазы закрученного состояния

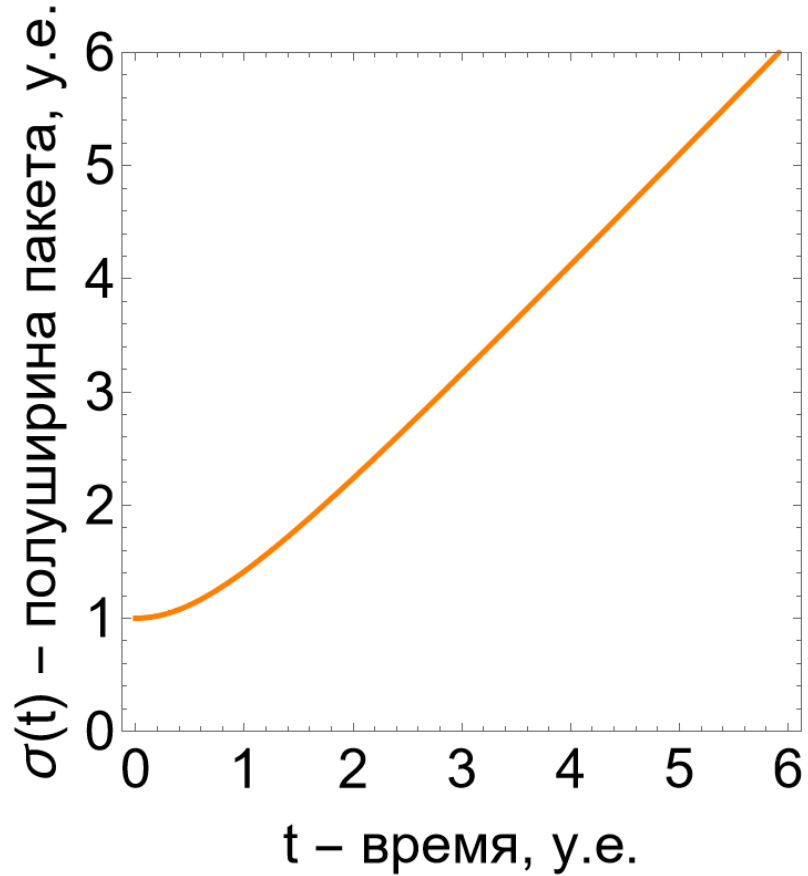


Князев Б. А., Сербо В. Г. "Пучки фотонов с ненулевой проекцией орбитального момента импульса: новые результаты" *УФН* **188** 508–539 (2018)

## Геометрия задачи



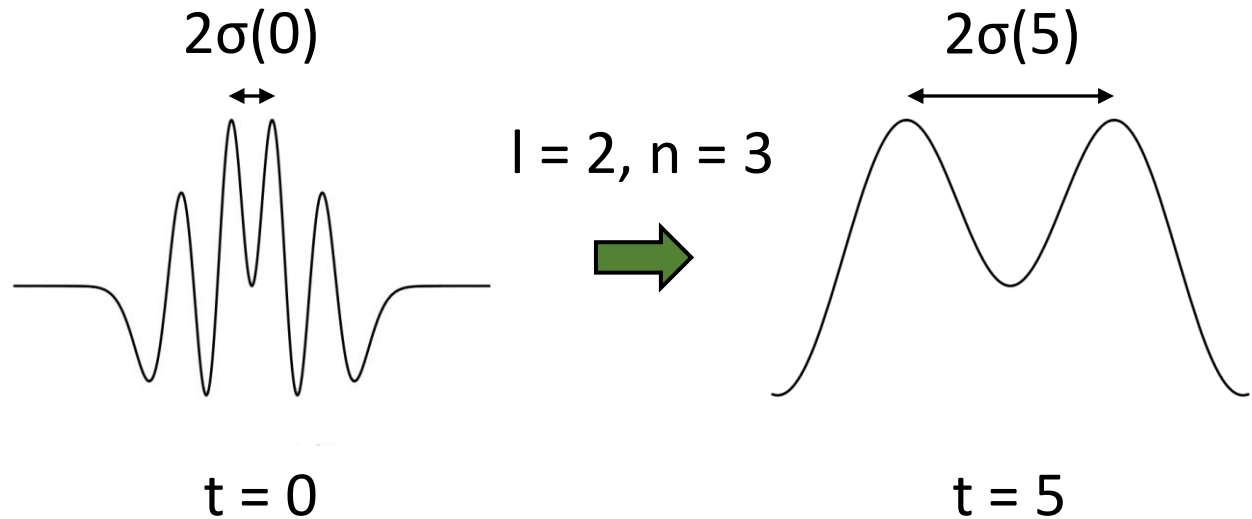
# Актуальность



## Проблема

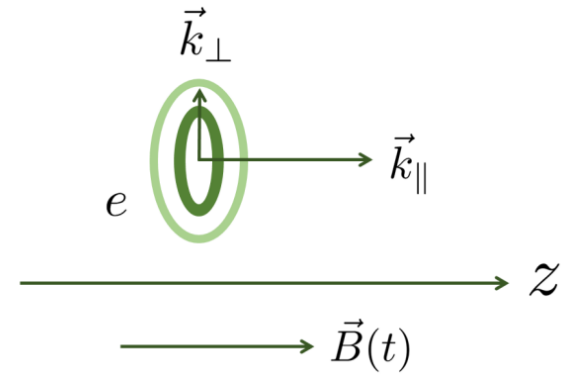
При распространении закрученной частицы в свободном пространстве состояние расплывается:

$$\Psi(\rho, \phi, t) \sim \frac{1}{\sigma(t)} \left( \frac{\rho}{\sigma(t)} \right)^{|l|} \mathcal{L}_n^{|l|} \left[ \frac{\rho^2}{\sigma^2(t)} \right] \exp \left[ -\frac{\rho^2}{2\sigma^2(t)} \right] \times \exp \left[ il\phi - i\phi_G(t) + i\frac{\rho^2}{2R^2(t)} \right]$$



# Формализация поставленной задачи

- Можно разделять переменные и  $\Psi = \Psi_{\parallel} \Psi_{\perp}$
- Система обладает цилиндрической симметрией



$$\hat{H}_{\perp} = \frac{[\sqrt{w}\hat{\mathbf{p}}_{\perp} - e\mathbf{A}(t)]^2}{2m}, \quad \text{где } \mathbf{A}^T = \left( -\frac{By}{2\sqrt{w}}, \frac{Bx}{2\sqrt{w}}, 0 \right)$$

$w(t) = e^{-f(t)}$  – вронскиан системы,  
 $\dot{f}(t)$  – коэффициент затухания

$$\hat{H}_{\perp} = w(t) \frac{\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2(t)(\hat{x}^2 + \hat{y}^2)}{2w(t)} + \omega(t)\hat{L}_z, \quad \text{где } \omega(t) = \frac{|e|B(t)}{2m}$$

# Классическое преобразование Арнольда

$$(1) \quad \ddot{x} + f\dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad u_1, u_2 - \text{линейно независимые решения}$$

$$(2) \quad \overset{\circ\circ}{\kappa} = 0$$

Просто локальная замена переменных:

$$\mathbb{R} \times T \rightarrow \mathbb{R} \times T$$

$$(x, t) \mapsto (\kappa, \tau)$$

$$\begin{cases} \kappa = \frac{x}{u_2} \\ \tau = -\frac{u_1}{u_2} \end{cases}$$

[1] Арнольд В. И. “Обыкновенные дифференциальные уравнения”, — М.: МЦНМО, 2012. — С. 344.

[2] Aldaya V. et al. “The quantum Arnold transformation”, — J. Phys. A, **44**, p. 065302, 2011.

# Двумерное преобразование Ермакова

$$i \frac{\partial \psi_1}{\partial t_1} = \hat{H}_1 \psi_1 \quad , \quad \text{где} \quad \hat{H}_1 = -\frac{w_1}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \right) + \frac{m\omega_1^2(x_1^2 + y_1^2)}{2w_1}$$

$$i \frac{\partial \psi_2}{\partial t_2} = \hat{H}_2 \psi_2 \quad , \quad \text{где} \quad \hat{H}_2 = -\frac{w_2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) + \frac{m\omega_2^2(x_2^2 + y_2^2)}{2w_2}$$

$$\hat{\mathcal{E}} : \begin{cases} x_2 = x_1 b(t_2) \\ y_2 = y_1 b(t_2) \\ \int_0^{t_2} \frac{w_2(t'')}{b^2(t'')} dt'' = \int_0^{t_1} w_1(t') dt' \\ \psi_2(x_2, y_2, t_2) = \frac{1}{b} \psi_1(x_1, y_1, t_1) \exp \left\{ \frac{i}{2} \frac{m}{w_2} \frac{\dot{b}}{b} (x_2^2 + y_2^2) \right\} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \boxed{\psi_2 = \hat{\mathcal{E}} \psi_1}$$

$$\ddot{b} + \dot{f}_2 \dot{b} + \omega_2^2 b = \frac{w_2^2 \omega_1^2}{w_1^2 b^3}$$

Уравнение Ермакова-Пинни

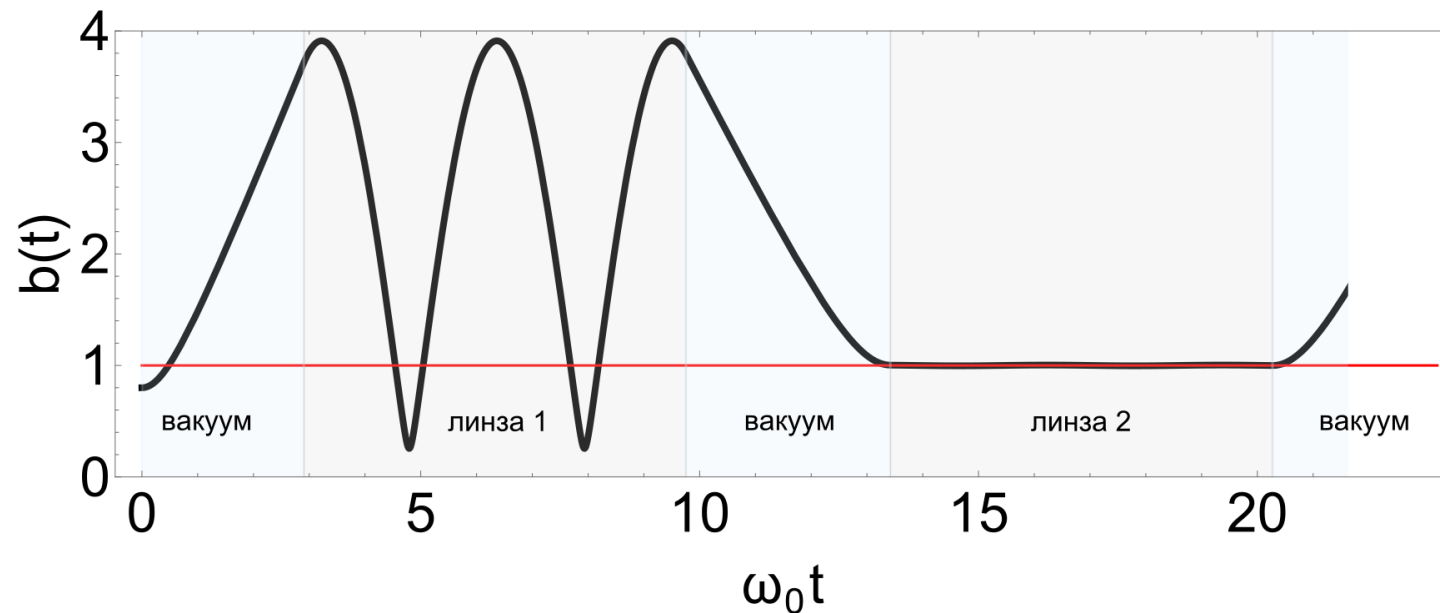
## Двумерное квантовое преобразование

$$i \frac{\partial \tilde{\psi}_1}{\partial t_1} = (\hat{H}_1 + \omega_1 \hat{L}_{z_1}) \tilde{\psi}_1 \quad \Rightarrow \quad \tilde{\psi}_1 = \exp \left\{ -i \int_0^{t_1} \omega_1 \hat{L}_{z_1} dt' \right\} \psi_1$$

$$i \frac{\partial \tilde{\psi}_2}{\partial t_2} = (\hat{H}_2 + \omega_2 \hat{L}_{z_2}) \tilde{\psi}_2 \quad \Rightarrow \quad \tilde{\psi}_2 = \exp \left\{ -i \int_0^{t_2} \omega_2 \hat{L}_{z_2} dt'' \right\} \psi_2$$

$$\tilde{\psi}_2 = \exp \left\{ -i \int_0^{t_2} \omega_2 \hat{L}_{z_2} dt'' \right\} \hat{\mathcal{E}} \exp \left\{ i \int_0^{t_1} \omega_1 \hat{L}_{z_1} dt' \right\} \tilde{\psi}_1$$

Случай закрученных электронов  $\Psi \sim e^{il\phi}$



$$\hat{\mathcal{E}}_{1 \mapsto 2}^{tw} : \begin{cases} x_2 = b(t_2)x_1 \\ y_2 = b(t_2)y_1 \\ \int_0^{t_2} \frac{\omega_2(t'')}{b^2(t'')} dt'' = \int_0^{t_1} \omega_1(t') dt' \\ \psi_2(x_2, y_2, t_2) = \frac{1}{b} \psi_1(x_1, y_1, t_1) \exp \left\{ \frac{i}{2} \frac{m}{\omega_2} \frac{\dot{b}}{b} (x_2^2 + y_2^2) \right\} \times \\ \times \exp \left\{ -il \int_0^{t_2} \omega_2 dt'' + il \int_0^{t_1} \omega_1 dt' \right\} \end{cases}$$



# Описание нестационарных состояний Ландау

Стационарные состояния Ландау:

$$\psi_1(\rho, \phi, t) = N \left( \frac{\rho}{\rho_H} \right)^{|l|} \mathcal{L}_n^{|l|} \left[ \frac{2\rho^2}{\rho_H^2} \right] \exp \left[ -\frac{\rho^2}{\rho_H^2} + il\phi - i\varepsilon_{\perp} t \right]$$

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$$

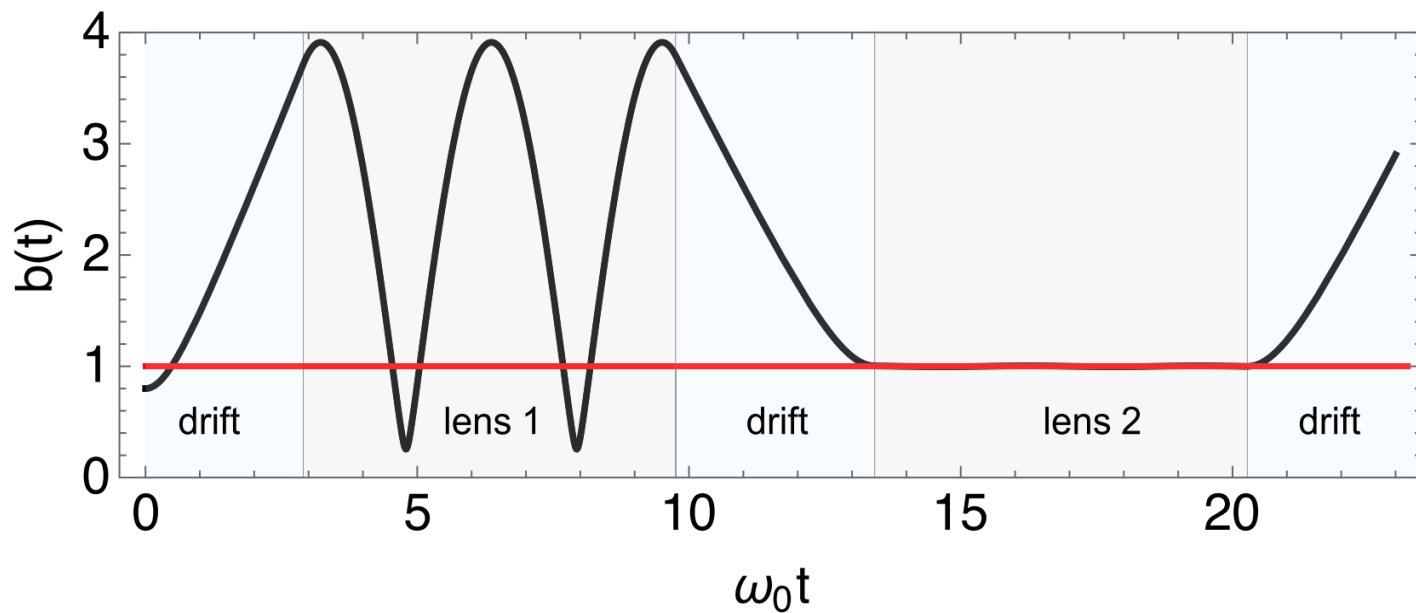
$$w_1 = w_2 = 1$$

$$\ddot{b} + \omega_0^2 b = \frac{\omega_0^2}{b^3}$$

Нестационарные состояния Ландау:

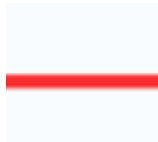


$$\psi_2(\rho, \phi, t) = \frac{N}{b} \left( \frac{\rho}{b\rho_H} \right)^{|l|} \mathcal{L}_n^{|l|} \left[ \frac{2\rho^2}{b^2\rho_H^2} \right] \exp \left[ -\frac{\rho^2}{b^2\rho_H^2} + il\phi - i(\varepsilon_{\perp} - \omega_0 l) \int \frac{dt}{b^2} - il\omega_0 t + \frac{im}{2} \frac{\dot{b}}{b} \rho^2 \right]$$

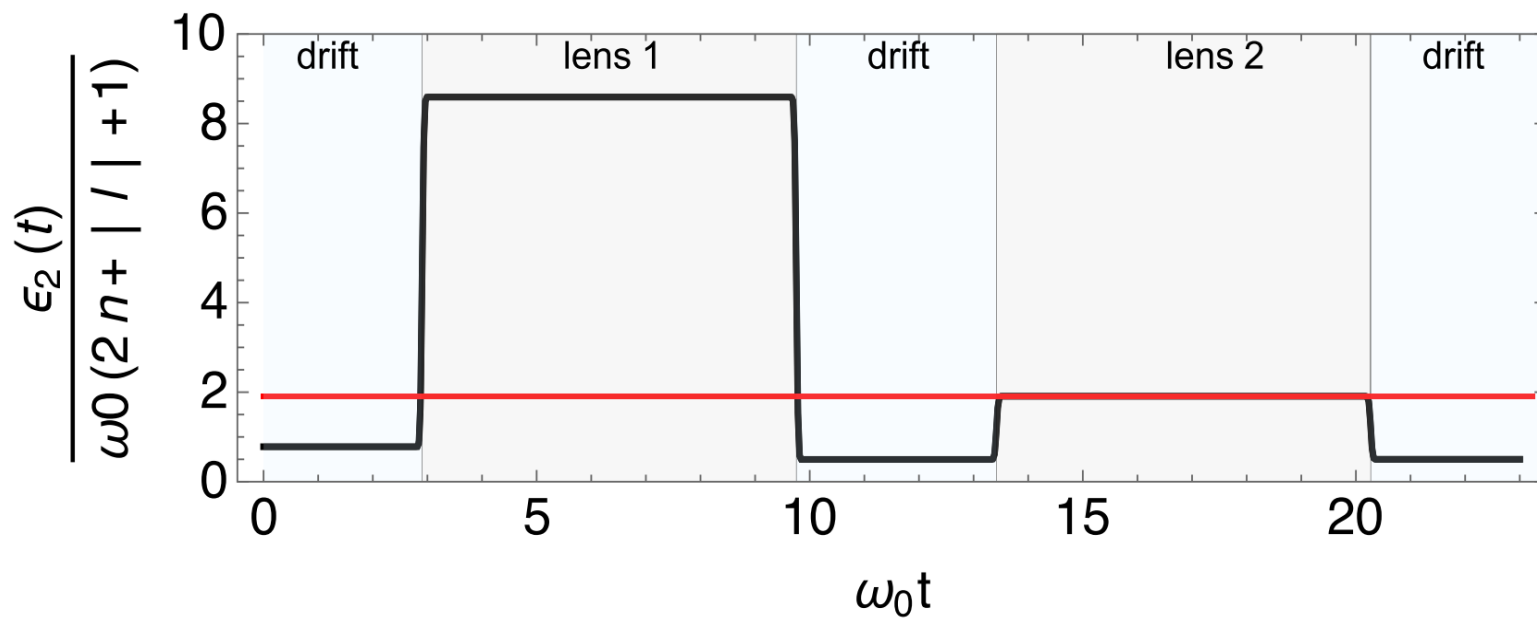
$$\varepsilon_{\perp} = \omega_0 (2n + |l| + l + 1) \quad \longrightarrow \quad \varepsilon_2 = \omega_0 (2n + |l| + 1) \underbrace{\frac{1}{2} \left[ b^2 + \frac{\dot{b}^2}{\omega_0^2} + \frac{1}{b^2} \right]}_{\geq 1} + l\omega_0 \geq \varepsilon_{\perp}$$



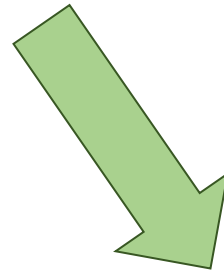
$$l = 10$$

$$n = 0$$

 стационарные состояния Ландау  
 состояния Ландау  
 нестационарные состояния Ландау

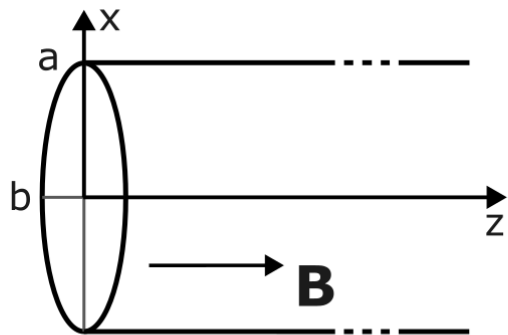


Однородное нестационарное  
магнитное поле

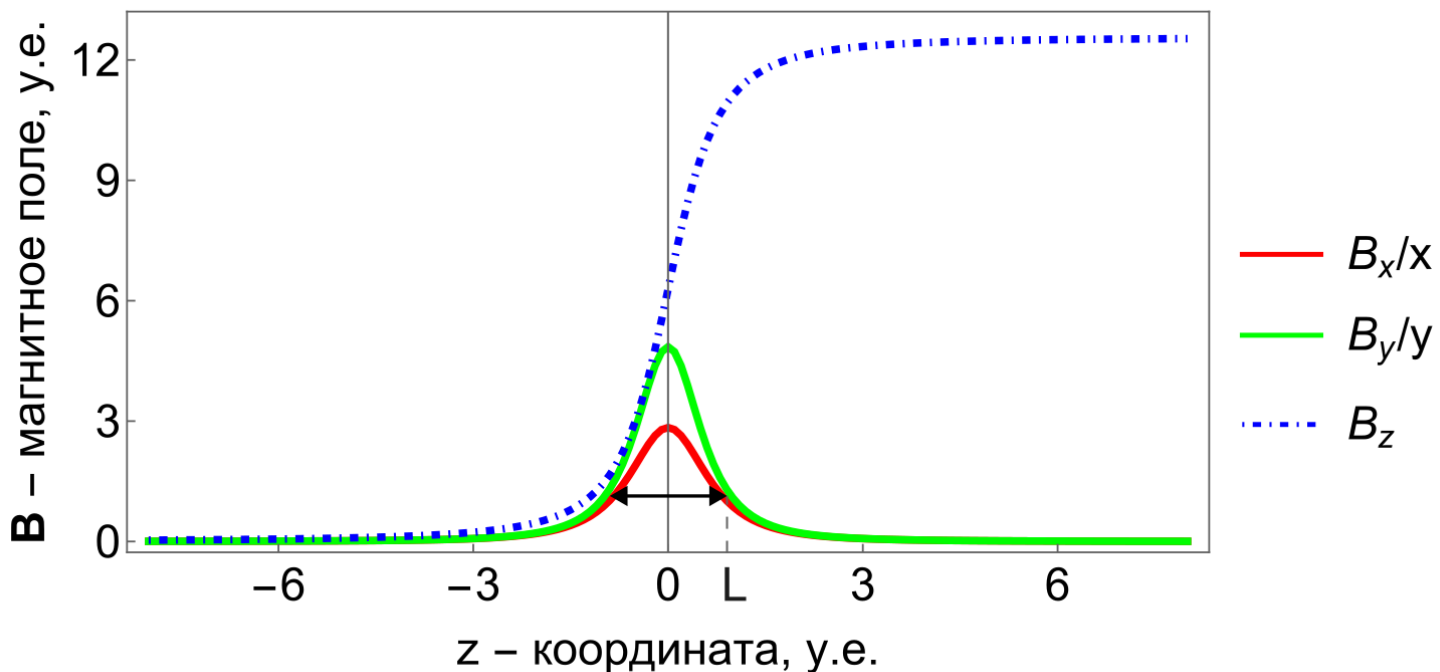


Асимметричное стационарное  
магнитное поле

# Магнитное поле асимметричного соленоида с $B_z(z) = B_0\theta(z)$



$$\mathbf{B} = B_0 \begin{pmatrix} -(1 - \beta)x\delta(z) \\ -\beta y\delta(z) \\ \theta(z) \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{A} = B_0 \begin{pmatrix} -\beta y\theta(z) \\ (1 - \beta)x\theta(z) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Гамильтониан вдали от торца соленоида  $z \gg L$

$$\mathbf{A}^T = B (-\beta y; (1 - \beta)x; 0)$$

Удобно взять  $\beta = \sin^2 \alpha$

$$\hat{H}_\perp = \frac{[\hat{\tilde{p}}_\perp - e\tilde{\mathbf{A}}]^2}{2m} = \hat{H}_s + \hat{H}_{as}, \text{ причём } \forall \alpha [\hat{H}_s, \hat{H}_{as}(\alpha)] = 0$$

$$\hat{H}_{as}(\alpha) = [\cos(2\alpha)\hat{H}_1 + \sin(2\alpha)\hat{H}_3]$$

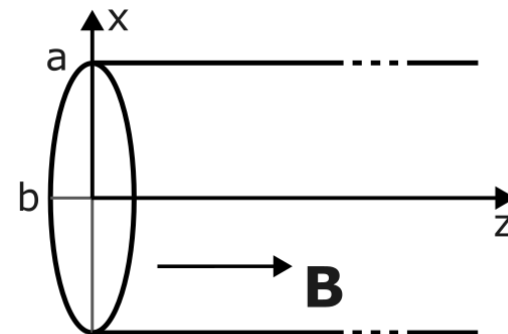
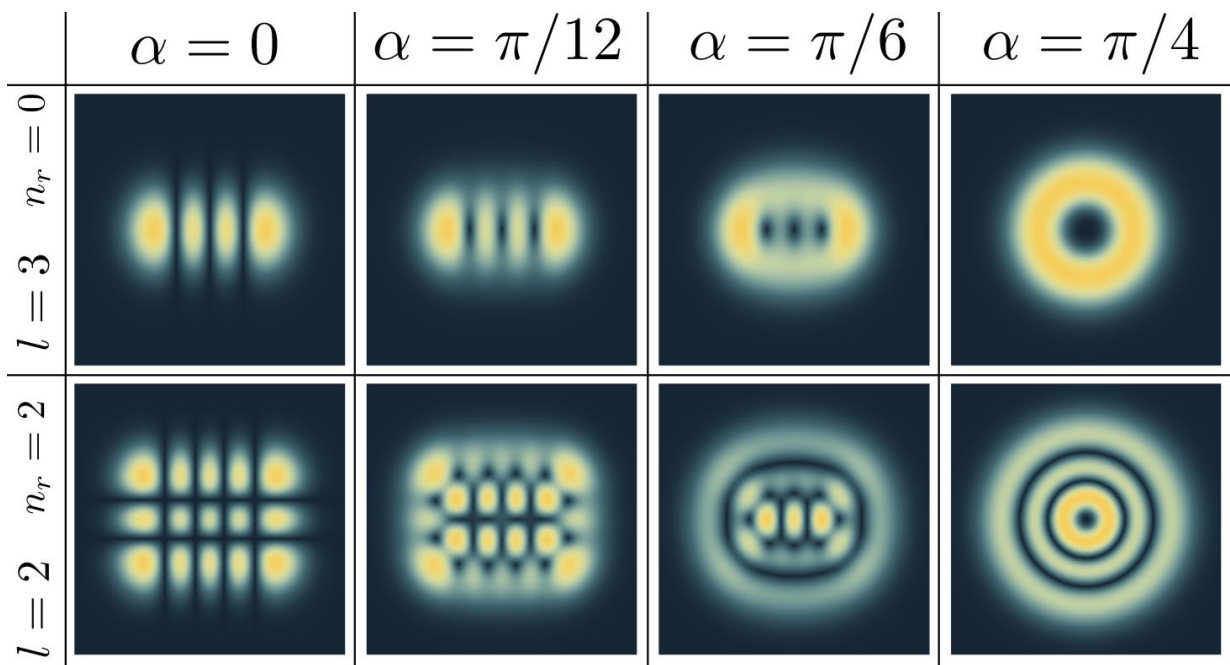
Куски асимметричной части гамильтониана образуют SO(3) алгебру:

$$[\hat{H}_i, \hat{H}_j] = 2i\omega\varepsilon_{ijk}\hat{H}_k, \quad i, j, k \in \{1, 2, 3\}$$

Каноническая замена:

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \sqrt{2} \cos \alpha \hat{\tilde{x}} & \hat{y} &= \sqrt{2} \sin \alpha \hat{\tilde{y}} \\ \hat{p}_x &= \frac{\hat{\tilde{p}}_x}{\sqrt{2} \cos \alpha} & \hat{p}_y &= \frac{\hat{\tilde{p}}_y}{\sqrt{2} \sin \alpha} \end{aligned}$$

# Собственные функции



Описание  $\mathcal{G}_{n_r, l}$  :

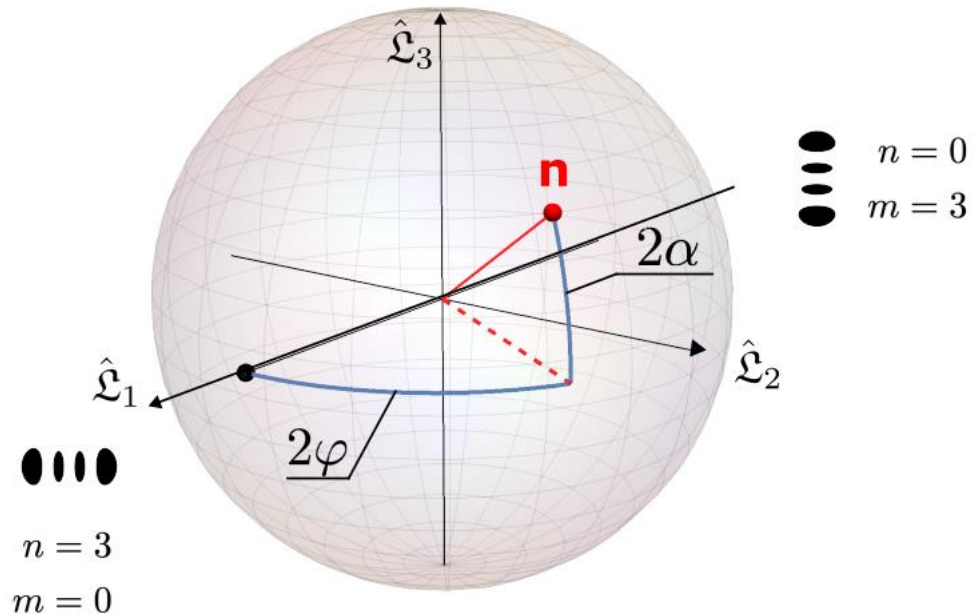
Абрамочкин Е. Г., Волостников В. Г.  
 “Современная оптика гауссовых пучков”,  
 — М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 2010

$$\hat{H}_\perp \mathcal{G}_{n_r, l}(x/\rho_H, y/\rho_H | \alpha) = \omega(2n_r + |l| + l + 1) \mathcal{G}_{n_r, l}(x/\rho_H, y/\rho_H | \alpha)$$

# Орбитальная сфера Пуанкаре

$O_{3,0}$

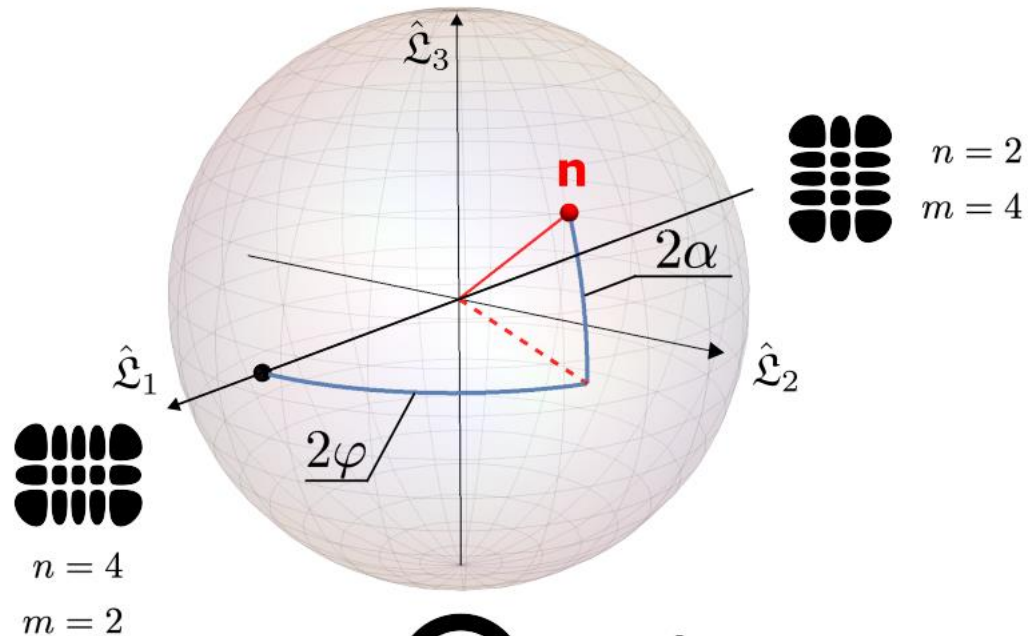
$n_r = 0$   
 $l = +3$



$n_r = 0$   
 $l = -3$

$O_{2,2}$

$n_r = 2$   
 $l = +2$



$n_r = 2$   
 $l = -2$

# Заключение

- 1) Построена точная теоретическая модель движения закрученного электрона в магнитном поле системы соленоидов
- 2) Построен базис в случае асимметричной по  $x$  и  $y$  магнитной системы



*N. V. Filina and S. S. Baturin. Unitary equivalence of twisted quantum states. Phys. Rev. A, 108:012219, Jul 2023.*



*N. V. Filina and S. S. Baturin. Twisted charged particles in the uniform magnetic field with broken symmetry. Phys. Rev. A, 110:022204, Aug 2024*

Контакты:  
[nvfilina@bk.ru](mailto:nvfilina@bk.ru)



# Заключение

- 1) Построена точная теоретическая модель движения закрученного электрона в магнитном поле системы соленоидов
- 2) Построен базис в случае асимметричной по  $x$  и  $y$  магнитной системы



*N. V. Filina and S. S. Baturin. Unitary equivalence of twisted quantum states. Phys. Rev. A, 108:012219, Jul 2023.*



*N. V. Filina and S. S. Baturin. Twisted charged particles in the uniform magnetic field with broken symmetry. Phys. Rev. A, 110:022204, Aug 2024*

Контакты:  
[nvfilina@bk.ru](mailto:nvfilina@bk.ru)

**Спасибо за внимание!**

$$\mathbf{A}^T = \left\{ -\frac{1}{2}B_z(z)y; \frac{1}{2}B_z(z)x; 0 \right\} \quad \mathbf{B}^T = \left\{ -\frac{1}{2}\dot{B}_z x; -\frac{1}{2}\dot{B}_z y; B_z \right\}$$

Адиабатическое приближение  $B_x, B_y \sim \dot{B}_z \rho_H \ll \max |B_z|$

$$E\Psi = \hat{H}\Psi, \quad E = \frac{k^2}{2m_e}, \quad \hat{H} = \frac{[\hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A}(z)]^2}{2m_e}$$

Параксиальное приближение  $k_z \gg k_\perp, \quad \partial_z^2 \Psi \simeq -k^2 \Psi + 2ik(\partial_z \psi) \frac{\Psi}{\psi}$

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r})e^{ikz}e^{-iEt}$$

$$\left[ \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m_e} + \frac{k^2}{2m_e} - i\frac{k}{m_e} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{eB_z L_z}{2m_e} + \frac{e^2 A^2}{2m_e} - E \right] \psi = 0$$

## Явный вид частей гамильтониана

$$\hat{H}_s = -\frac{1}{2m_e} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \frac{m_e \omega^2 (x^2 + y^2)}{2}$$

$$\hat{H}_1 = -\frac{1}{2m_e} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \frac{m_e \omega^2 (x^2 - y^2)}{2}$$

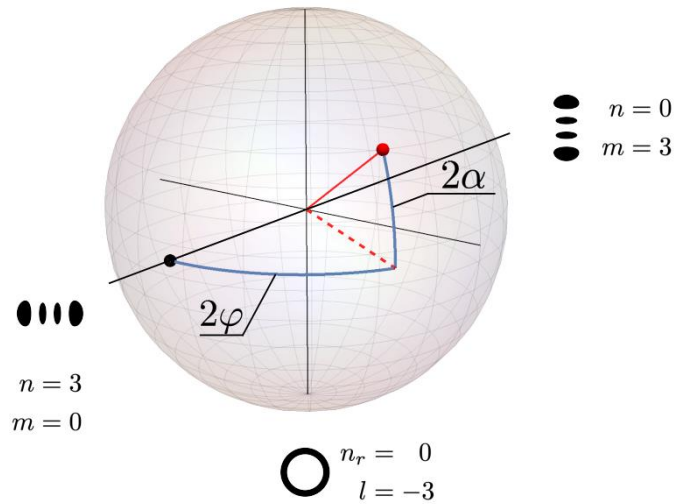
$$\hat{H}_2 = -\frac{1}{m_e} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + m_e \omega^2 xy$$

$$\hat{H}_3 = \omega \hat{L}_z = -i\omega \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

# Орбитальная сфера Пуанкаре

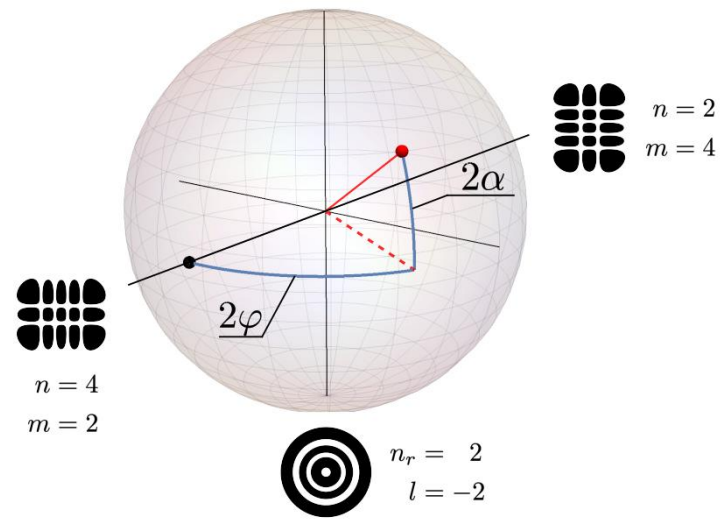
$\mathcal{O}_{3,0}$

$\bigcirc$   $n_r = 0$   
 $l = +3$



$\mathcal{O}_{2,2}$

$\bigcirc$   $n_r = 2$   
 $l = +2$



$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi \cos 2\alpha \\ \sin 2\varphi \cos 2\alpha \\ \sin 2\alpha \end{pmatrix}$$

$$(\hat{\mathcal{L}}) = \frac{1}{2\omega} \begin{pmatrix} \hat{H}_1 \\ \hat{H}_2 \\ \hat{H}_3 \end{pmatrix}$$

$$\hat{R}\hat{H}_s\hat{R}^{-1} = \hat{H}_s$$

$$\hat{R}\hat{H}_{as}\hat{R}^{-1} = 2\omega n \hat{\mathcal{L}}$$



$$\hat{H} = \hat{H}_s + 2\omega n \hat{\mathcal{L}}$$

# Классическое преобразование Арнольда

$$(1) \quad \ddot{x} + f\dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad u_1, u_2 - \text{линейно независимые решения}$$

$$(2) \quad \overset{\circ\circ}{\kappa} = 0$$

Просто локальная замена переменных:

$$\mathbb{R} \times T \rightarrow \mathbb{R} \times T$$

$$(x, t) \mapsto (\kappa, \tau)$$

$$\begin{cases} \kappa = \frac{x}{u_2} \\ \tau = -\frac{u_1}{u_2} \end{cases}$$

# Квантовое преобразование Арнольда

Классическая замена переменных индуцирует сдвигку импульса:

$$p_\tau = m \frac{d\kappa}{d\tau} = \frac{\overset{\circ}{t}}{u_2} p_x - \underbrace{m \frac{\dot{u}_2}{u_2^2} \overset{\circ}{t} x}_G$$

$G$  – калибровочный потенциал

$$G = \frac{d\theta_\kappa}{d\kappa} \quad \rightarrow \quad \theta_\kappa = -m \frac{\dot{u}_2}{u_2^2} \overset{\circ}{t} \int_0^x \tilde{x} d\kappa = -\frac{m}{2w} \frac{\dot{u}_2}{u_2} x^2$$

$\theta_\kappa$  – дополнительная фаза волновой функции

# Квантовое преобразование Арнольда

$$(1) \quad i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{w}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2w} \psi$$

$$(2) \quad i \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = -\frac{1}{2m} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \kappa^2}$$

К замене координат добавляется преобразование волновой функции:

$$\hat{Q}: \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}_{\text{free}} \quad \begin{cases} \kappa = \frac{x}{u_2} \\ \tau = -\frac{u_1}{u_2} \end{cases}$$

*нормировка*  *$i\theta_k$*

↓ ↓

$$\varphi(k, \tau) = \psi(x, t) \sqrt{u_2} e^{-\frac{i}{2} \frac{m}{w} \frac{\dot{u}_2}{u_2} x^2}$$

# Преобразование Ермакова

$$(1) \quad \ddot{x}_1 + \dot{f}_1 \dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = 0$$

$u_1^{(1)}, u_2^{(1)}$  – линейно  
независимые решения (1)

$$(2) \quad \ddot{x}_2 + \dot{f}_2 \dot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 = 0$$

$u_1^{(2)}, u_2^{(2)}$  – линейно  
независимые решения (2)

Введём новую  
функцию:

$$b(t_2) = \frac{u_2^{(2)}}{u_2^{(1)}} = \frac{x_2}{x_1}$$

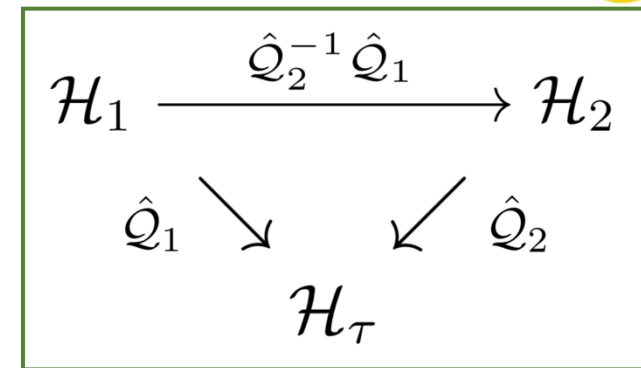
Тогда  $\frac{dt_1}{dt_2} = \dot{t}_1 = \frac{\omega_2(t_2)}{\omega_1(t_1)} \frac{1}{b^2(t_2)}$

Уравнение Ермакова-Пинни

$$\ddot{b} + \dot{f}_2 \dot{b} + \omega_2^2 b = \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} \frac{\omega_1^2}{b^3}$$



# Преобразование Ермакова



$$\hat{Q}_2^{-1} \hat{Q}_1 : \begin{cases} x_2 = b x_1 \\ \int_0^{t_2} \frac{w_2(t'')}{b^2(t'')} dt'' = \int_0^{t_1} w_1(t') dt' \\ \psi_2(x_2, t_2) = \psi_1(x_1, t_1) \frac{1}{\sqrt{b}} e^{\frac{i}{2} \frac{m}{w_2} \frac{\dot{b}}{b} x_2^2} \end{cases}$$

Уравнение Ермакова-Пинни

$$\ddot{b} + \dot{f}_2 \dot{b} + \omega_2^2 b = \frac{w_2^2}{w_1^2} \frac{\omega_1^2}{b^3}$$

# Двумерное преобразование Ермакова

$$i \frac{\partial \psi_1}{\partial t_1} = \hat{H}_1 \psi_1 \quad , \quad \text{где} \quad \hat{H}_1 = -\frac{w_1}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \right) + \frac{m\omega_1^2(x_1^2 + y_1^2)}{2w_1}$$

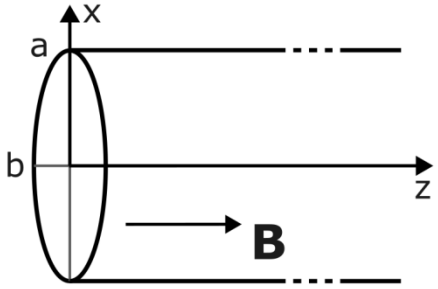
$$i \frac{\partial \psi_2}{\partial t_2} = \hat{H}_2 \psi_2 \quad , \quad \text{где} \quad \hat{H}_2 = -\frac{w_2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) + \frac{m\omega_2^2(x_2^2 + y_2^2)}{2w_2}$$

$$\hat{\mathcal{E}} : \begin{cases} x_2 = x_1 b(t_2) \\ y_2 = y_1 b(t_2) \\ \int_0^{t_2} \frac{w_2(t'')}{b^2(t'')} dt'' = \int_0^{t_1} w_1(t') dt' \\ \psi_2(x_2, y_2, t_2) = \frac{1}{b} \psi_1(x_1, y_1, t_1) \exp \left\{ \frac{i}{2} \frac{m}{w_2} \frac{\dot{b}}{b} (x_2^2 + y_2^2) \right\} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \boxed{\psi_2 = \hat{\mathcal{E}} \psi_1}$$

$$\ddot{b} + \dot{f}_2 \dot{b} + \omega_2^2 b = \frac{w_2^2 \omega_1^2}{w_1^2 b^3}$$

Уравнение Ермакова-Пинни

Магнитное поле асимметричного соленоида с  $B_z(z) = B_0\theta(z)$



$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \partial_x B_x + \partial_y B_y + B_0 \delta(z) = 0$$

$$\mathbf{B} = B_0 \begin{pmatrix} -(1 - \beta)x\delta(z) \\ -\beta y\delta(z) \\ \theta(z) \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{A} = B_0 \begin{pmatrix} \theta(z) [ax + by] \\ \theta(z) [(1 + b)x + cy] \\ \delta(z) [\frac{a}{2}x^2 + dxy + \frac{c}{2}y^2] \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \Rightarrow d - b = \beta$$

Возьмём калибровочный потенциал в виде

$$\chi = -B_0\theta(z) \left( \frac{a}{2}x^2 + dxy + \frac{c}{2}y^2 \right)$$



$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \cdot \chi = B_0 \begin{pmatrix} -\beta y\theta(z) \\ (1 - \beta)x\theta(z) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' = 0 \Rightarrow \text{калибровка Кулона}$$

## Free-Electron Qubits

Ori Reinhardt, Chen Mechel, Morgan Lynch, and Ido Kaminer\*




Free-electron interactions with laser-driven nearfields can quantize the electrons' energy spectrum and provide control over this quantized degree of freedom. The study proposes to use such interactions to promote free electrons as carriers of quantum information and show how to create a qubit on a free electron, which holds promise for applications in electron microscopy and spectroscopy. A method to implement the qubit's noncommutative spin algebra, and to control and measure the qubit state with a universal set of 1-qubit gates is shown. These gates are within the current capabilities of ultrafast transmission electron microscopes. Laser-driven free-electron qubits promise configurability by the laser intensity, frequency, and polarizability, simultaneously with high-resolution temporal control on femtosecond timescales.

manipulating them with femtosecond laser pulses in optical frequencies. Compared to bound electrons, free-electron systems enable accessing high energy scales and short time scales. Moreover, they possess quantized degrees of freedom that can take unbounded values, such as OAM, which has also been proposed for information encoding.<sup>[25–30]</sup> Analogously, photons also have the capability to encode information in their OAM.<sup>[31,32]</sup> However, implementing even a single qubit necessitates implementing its (noncommutative) spin algebra, which has so far not been realized in



PHYSICAL REVIEW RESEARCH **3**, 043033 (2021)

### Free-electron qubits and maximum-contrast attosecond pulses via temporal Talbot revivals

M. V. Tsarev , A. Ryabov , and P. Baum \*

Universität Konstanz, Universitätsstraße 10, 78464 Konstanz, Germany



(Received 15 April 2021; accepted 14 September 2021; published 14 October 2021)