

Сессия-конференция  
секции ядерной  
физики ОФН РАН,  
посвященная 70-летию  
В.А. Рубакова



САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
SAMARA UNIVERSITY

Спектр масс тяжелых  
тетракварков в вариационном  
подходе

Автор: А.В.Эскин  
Соавторы: В.И. Коробов,  
А.П. Мартыненко и  
Ф.А. Мартыненко

17-21 Февраля 2025 г.,  
Президиум РАН, Москва



Наши предыдущие исследования связанных состояний частиц в квантовой электродинамике были посвящены в основном трехчастичным связанным состояниям, таким как мезомолекулы водорода, мюонный гелий, мюонные ионы лития, бериллия и бора, пионный и каонный гелий. Для расчета их уровней энергии использовался стохастический вариационный метод [1-3].

В данной работе развивается вариационный метод для случая 4 частиц. В качестве приложения он используется для расчета уровней энергии тяжелых тетракварков, состоящих из  $s$  и  $b$  кварков. Характерная особенность метода состоит в использовании базиса из гауссовых функций.

Коллаборация LHCb зарегистрировала резонанс  $X(6900)$  [4], который был подтвержден в эксперименте ATLAS и является кандидатом на тетракварк ( $ss\bar{c}\bar{c}$ ) наряду с другими многочисленными резонансами, открытыми в последние годы. Подробное изучение тетракварков выполнено [5-7].

Имеются разные подходы и приближения к исследованию тетракварков, а также большой разброс результатов расчета масс тяжелых тетракварков. В данной работе рассмотрено вычисление масс вне рамок дикуарк-антидикуаркового описания, но в нерелятивистском приближении.

1. K. Varga, Y. Suzuki, Solution of few body problems with the stochastic variational method: 1. Central forces. Comp. Phys. Comm. 1997, 106, 157.
2. V.I. Korobov, Variational Methods in the Quantum Three-Body Problem with Coulomb Interaction. Phys. Part. Nucl. 2022, 53, 5.
3. A. V. Eskin, V. I. Korobov, A. P. Martynenko, and F. A. Martynenko, Three particle muon electron bound systems in quantum electrodynamics, Atoms 11, 25 (2023).
4. LHCb collaboration, Observation of structure in the  $J/\psi$ -pair mass spectrum LHCb collaboration, Science Bulletin, Vol. 65, Issue 23, 1983 (2020).
5. R. N. Faustov, V. O. Galkin, E. M. Savchenko, Fully Heavy Tetraquark Spectroscopy in the Relativistic Quark Model, Symmetry 14 (2022) 12, 2504.
6. R. N. Faustov, V. O. Galkin, E. M. Savchenko, Heavy tetraquarks in the relativistic quark model, Universe 7 (2021) 4, 94
7. R. N. Faustov, V. O. Galkin, E. M. Savchenko, Masses of the  $(QQ\bar{Q}\bar{Q})$  tetraquarks in the relativistic diquark--antidiquark picture, Phys. Rev. D 102, 114030 (2020).



# ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ

Целью данной работы является развитие вариационного метода с гауссовскими функциями на случай четырех частиц, исследование спектра энергии основных состояний тетракварков.

## **Задачи:**

1. Расчет матричных элементов для кинетической, потенциальной энергии и нормировки в аналитическом виде.
2. Написание компьютерного кода для решения задач для связанного состояния нескольких частиц с использованием стохастического вариационного метода, который использует коррелированный гауссовский базис для получения точного решения для четырехчастичных систем.
3. Расчет уровней энергии связанных состояний на основе стохастического вариационного метода [1,2].

Ранее в рамках стохастического вариационного метода были изучены уровни энергии трехчастичных мезомолекул водорода, мюонного гелия и других систем.

1. K. Varga and Y. Suzuki, *Comp. Phys. Comm.* 106, 157 (1997).
2. A. V. Eskin, V. I. Korobov, A. P. Martynenko, F. A. Martynenko, *Atoms* 11, 25 (2023).



# СТОХАСТИЧЕСКИЙ ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД

Система из 4 частиц с массами  $m_1, m_2, m_3$  и  $m_4$  описывается уравнением Шредингера в координатах Якоби, которое имеет вид:

$$H\Psi(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\sigma}) = E\Psi(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\sigma})$$

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu_1} \Delta_{\boldsymbol{\rho}} - \frac{\hbar^2}{2\mu_2} \Delta_{\boldsymbol{\lambda}} - \frac{\hbar^2}{2\mu_3} \Delta_{\boldsymbol{\sigma}} + V_{coul} + V_{conf}$$

$$\mu_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \mu_2 = \frac{m_3 m_4}{m_3 + m_4}, \mu_3 = \frac{(m_1 + m_2)(m_3 + m_4)}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$$

Верхняя граница энергии основного состояния системы определяется наименьшим собственным значением обобщенной задачи на собственные значения

$$\Psi = \sum_{i=1}^K c_i \psi_i(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\sigma}, A_i)$$

$$B_{ij} = \langle \psi(\mathbf{x}, A_i) | \psi(\mathbf{x}, A_j) \rangle$$

$$H_{ij} = \langle \psi(\mathbf{x}, A_i) | H | \psi(\mathbf{x}, A_j) \rangle$$

$$\psi(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\sigma}, A) = e^{-\frac{1}{2}[A_{11}\boldsymbol{\rho}^2 + A_{22}\boldsymbol{\lambda}^2 + A_{33}\boldsymbol{\sigma}^2 + 2A_{12}(\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\lambda}) + 2A_{13}(\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\sigma}) + 2A_{23}(\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\sigma})]}$$

$$HC = E_K BC$$



# КООРДИНАТЫ ЯКОБИ

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ c & c & \bar{c} & \bar{c} \end{matrix}$$

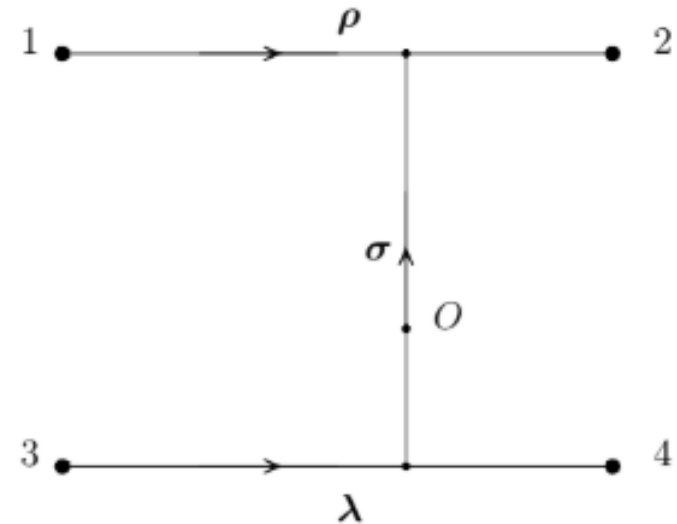
Координаты Якоби связаны с радиусами-векторами частиц следующим образом:

$$\mathbf{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \boldsymbol{\rho} + \frac{m_3 + m_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} \boldsymbol{\sigma}$$

$$\mathbf{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \boldsymbol{\rho} + \frac{m_3 + m_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} \boldsymbol{\sigma}$$

$$\mathbf{r}_3 = -\frac{m_4}{m_3 + m_4} \boldsymbol{\lambda} - \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} \boldsymbol{\sigma}$$

$$\mathbf{r}_4 = \frac{m_3}{m_3 + m_4} \boldsymbol{\lambda} - \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} \boldsymbol{\sigma}$$





Разложение волновой функции по базису имеет вид:

$$\Psi = \sum_{i=1}^K c_i \psi_i(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\sigma}, A_i)$$

$$\psi(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\sigma}, A) = e^{-\frac{1}{2}[A_{11}\boldsymbol{\rho}^2 + A_{22}\boldsymbol{\lambda}^2 + A_{33}\boldsymbol{\sigma}^2 + 2A_{12}(\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\lambda}) + 2A_{13}(\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\sigma}) + 2A_{23}(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\sigma})]}$$

Матричные элементы нормировки вычислены аналитически:

$$B = \int d\boldsymbol{\rho} \int d\boldsymbol{\lambda} \int d\boldsymbol{\sigma} e^{-\frac{1}{2}[(B_{11}\boldsymbol{\rho}^2 + 2B_{12}\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\lambda} + B_{22}\boldsymbol{\lambda}^2 + 2B_{13}\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\sigma} + 2B_{23}\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\sigma} + B_{33}\boldsymbol{\sigma}^2)]} =$$
$$\frac{(2\pi)^{\frac{9}{2}}}{B_{33}^{\frac{3}{2}}(\tilde{B}_{11}\tilde{B}_{22} - \tilde{B}_{12}^2)^{3/2}},$$

$$\tilde{B}_{11} = B_{11} - \frac{B_{13}^2}{B_{33}}; \tilde{B}_{22} = B_{22} - \frac{B_{23}^2}{B_{33}}; \tilde{B}_{12} = B_{12} - \frac{B_{13}B_{23}}{B_{33}}; B_{kl} = A_{kl}^i + A_{kl}^j$$



# МАТРИЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Оператор кинетической энергии состоит из трех слагаемых, которые определяются операторами Лапласа по переменным  $\rho$ ,  $\lambda$ ,  $\sigma$ . Все эти матричные элементы вычисляются аналитически в базисе из гауссовых функций. Результаты расчета имеют вид:

$$\langle \Delta_\rho \rangle = \frac{48\sqrt{2} \pi^{9/2}}{\det B^{5/2}} [A_{11}^2 (B_{22}B_{33} - B_{23}^2) + A_{12}^2 (B_{11}B_{33} - B_{13}^2) + A_{13}^2 (B_{11}B_{22} - B_{12}^2) - A_{11} \det B + 2A_{11}A_{12} (B_{13}B_{23} - B_{12}B_{33}) + 2A_{11}A_{13} (B_{12}B_{23} - B_{13}B_{22}) + 2A_{12}A_{13} (B_{12}B_{13} - B_{11}B_{23})],$$

$$\langle \Delta_\lambda \rangle = \frac{48\sqrt{2} \pi^{9/2}}{\det B^{5/2}} [A_{12}^2 (B_{22}B_{33} - B_{23}^2) + A_{22}^2 (B_{11}B_{33} - B_{13}^2) + A_{23}^2 (B_{11}B_{22} - B_{12}^2) - A_{22} \det B + 2A_{22}A_{12} (B_{13}B_{23} - B_{12}B_{33}) + 2A_{22}A_{23} (B_{12}B_{13} - B_{11}B_{23}) + 2A_{12}A_{23} (B_{12}B_{23} - B_{13}B_{22})],$$

$$\langle \Delta_\sigma \rangle = \frac{48\sqrt{2} \pi^{9/2}}{\det B^{5/2}} [A_{13}^2 (B_{22}B_{33} - B_{23}^2) + A_{23}^2 (B_{11}B_{33} - B_{13}^2) + A_{33}^2 (B_{11}B_{22} - B_{12}^2) - A_{33} \det B + 2A_{13}A_{23} (B_{13}B_{23} - B_{12}B_{33}) + 2A_{33}A_{13} (B_{12}B_{23} - B_{13}B_{22}) + 2A_{33}A_{23} (B_{12}B_{13} - B_{11}B_{23})],$$

$$\det B = B_{11}B_{22}B_{33} - B_{11}B_{23}^2 - B_{12}^2B_{33} + 2B_{12}B_{13}B_{23} - B_{13}^2B_{22}$$



# МАТРИЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Матричные элементы потенциальной энергии состоят в нерелятивистском приближении из матричных элементов парных кулоновских слагаемых и матричных элементов парных потенциалов конфайнмента. Прямой расчет интегралов дает следующие результаты:

$$\frac{1}{\langle |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| \rangle} = \frac{1}{\langle \rho \rangle} = \frac{32\pi^4}{B_{33}^{3/2} \sqrt{\tilde{B}_{22} (\tilde{B}_{11} \tilde{B}_{22} - \tilde{B}_{12}^2)}},$$

$$\frac{1}{\langle |\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4| \rangle} = \frac{1}{\langle \lambda \rangle} = \frac{32\pi^4}{B_{33}^{3/2} \sqrt{\tilde{B}_{11} (\tilde{B}_{11} \tilde{B}_{22} - \tilde{B}_{12}^2)}},$$

$$\frac{1}{\langle |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3| \rangle} = \frac{1}{\left\langle \left| \boldsymbol{\sigma} + \frac{m_4}{m_{34}} \boldsymbol{\lambda} - \frac{m_2}{m_{12}} \boldsymbol{\rho} \right| \right\rangle} = \frac{32\pi^4}{F_1^{3/2} \sqrt{F_2 - \frac{F_3^2}{F_1} \left[ \left( F_2 - \frac{F_3^2}{F_1} \right) \left( B_{33} - \frac{F_4^2}{F_1} \right) - \left( F_5 - \frac{F_3 F_4}{F_1} \right)^2 \right]}},$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_4|} \right\rangle &= \left\langle \frac{1}{\left| \boldsymbol{\sigma} - \frac{m_3}{m_{34}} \boldsymbol{\lambda} - \frac{m_2}{m_{12}} \boldsymbol{\rho} \right|} \right\rangle, & \frac{m_4}{m_{34}} &\rightarrow -\frac{m_3}{m_{34}}, \\ \left\langle \frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|} \right\rangle &= \left\langle \frac{1}{\left| \boldsymbol{\sigma} + \frac{m_1}{m_{12}} \boldsymbol{\rho} - \frac{m_4}{m_{34}} \boldsymbol{\lambda} \right|} \right\rangle, & \frac{m_2}{m_{12}} &\rightarrow -\frac{m_1}{m_{12}}, \\ \left\langle \frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_4|} \right\rangle &= \left\langle \frac{1}{\left| \boldsymbol{\sigma} + \frac{m_1}{m_{12}} \boldsymbol{\rho} - \frac{m_3}{m_{34}} \boldsymbol{\lambda} \right|} \right\rangle, & \frac{m_2}{m_{12}} &\rightarrow -\frac{m_1}{m_{12}}, \quad \frac{m_4}{m_{34}} \rightarrow -\frac{m_3}{m_{34}}. \end{aligned}$$

$$F_1 = B_{11} + B_{33} \frac{m_2^2}{m_{12}^2} - 2B_{13} \frac{m_2}{m_{12}},$$

$$F_4 = B_{13} + B_{33} \frac{m_2}{m_{12}},$$

$$F_2 = B_{22} + B_{33} \frac{m_4^2}{m_{34}^2} - 2B_{23} \frac{m_4}{m_{34}},$$

$$F_5 = B_{23} - B_{33} \frac{m_4}{m_{34}}$$

$$F_3 = B_{12} + B_{23} \frac{m_2}{m_{12}} - B_{33} \frac{m_2 m_4}{m_{12} m_{34}} - B_{13} \frac{m_4}{m_{34}},$$

$$\Delta V^{coul}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\sigma}) = -\frac{2\alpha_{s12}}{3\rho} - \frac{2\alpha_{s34}}{3\lambda} - \frac{4}{3} \frac{\alpha_{s13}}{\left| \boldsymbol{\sigma} + \frac{m_4}{m_{34}} \boldsymbol{\lambda} - \frac{m_2}{m_{12}} \boldsymbol{\rho} \right|} - \frac{4}{3} \frac{\alpha_{s14}}{\left| \boldsymbol{\sigma} - \frac{m_3}{m_{34}} \boldsymbol{\lambda} - \frac{m_2}{m_{12}} \boldsymbol{\rho} \right|} - \frac{4}{3} \frac{\alpha_{s23}}{\left| \boldsymbol{\sigma} + \frac{m_4}{m_{34}} \boldsymbol{\lambda} + \frac{m_1}{m_{12}} \boldsymbol{\rho} \right|} - \frac{4}{3} \frac{\alpha_{s24}}{\left| \boldsymbol{\sigma} - \frac{m_3}{m_{34}} \boldsymbol{\lambda} + \frac{m_1}{m_{12}} \boldsymbol{\rho} \right|}$$



# МАТРИЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Матричные элементы потенциальной энергии состоят в нерелятивистском приближении из матричных элементов парных кулоновских слагаемых и матричных элементов парных потенциалов конфайнмента. Прямой расчет интегралов дает следующие результаты:

$$\langle |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| \rangle = \langle \rho \rangle = \frac{64\pi^4 \sqrt{\tilde{B}_{22}}}{B_{33}^{3/2} (\tilde{B}_{11}\tilde{B}_{22} - \tilde{B}_{12}^2)^2},$$

$$\langle |\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4| \rangle = \langle \lambda \rangle = \frac{64\pi^4 \sqrt{\tilde{B}_{11}}}{B_{33}^{3/2} (\tilde{B}_{11}\tilde{B}_{22} - \tilde{B}_{12}^2)^2},$$

$$\langle |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3| \rangle = \left\langle \left| \boldsymbol{\sigma} + \frac{m_4}{m_{34}} \boldsymbol{\lambda} - \frac{m_2}{m_{12}} \boldsymbol{\rho} \right| \right\rangle = \frac{64\pi^4 \sqrt{F_2 - \frac{F_3^2}{F_1}}}{F_1^{3/2} \left[ \left( F_2 - \frac{F_3^2}{F_1} \right) \left( B_{33} - \frac{F_4^2}{F_1} \right) - \left( F_5 - \frac{F_3 F_4}{F_1} \right)^2 \right]^2},$$

$$\langle |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_4| \rangle = \langle \left| \boldsymbol{\sigma} - \frac{m_3}{m_{34}} \boldsymbol{\lambda} - \frac{m_2}{m_{12}} \boldsymbol{\rho} \right| \rangle, \quad \frac{m_4}{m_{34}} \rightarrow -\frac{m_3}{m_{34}},$$

$$\langle |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3| \rangle = \langle \left| \boldsymbol{\sigma} + \frac{m_4}{m_{34}} \boldsymbol{\lambda} + \frac{m_1}{m_{12}} \boldsymbol{\rho} \right| \rangle, \quad \frac{m_2}{m_{12}} \rightarrow -\frac{m_1}{m_{12}},$$

$$\langle |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_4| \rangle = \langle \left| \boldsymbol{\sigma} - \frac{m_3}{m_{34}} \boldsymbol{\lambda} + \frac{m_1}{m_{12}} \boldsymbol{\rho} \right| \rangle, \quad \frac{m_2}{m_{12}} \rightarrow -\frac{m_1}{m_{12}}, \quad \frac{m_4}{m_{34}} \rightarrow -\frac{m_3}{m_{34}}.$$

$$\Delta V^{conf}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} A \rho + \frac{1}{2} A \lambda + A \left| \boldsymbol{\sigma} + \frac{m_4}{m_{34}} \boldsymbol{\lambda} - \frac{m_2}{m_{12}} \boldsymbol{\rho} \right| + A \left| \boldsymbol{\sigma} - \frac{m_3}{m_{34}} \boldsymbol{\lambda} - \frac{m_2}{m_{12}} \boldsymbol{\rho} \right| + A \left| \boldsymbol{\sigma} + \frac{m_4}{m_{34}} \boldsymbol{\lambda} + \frac{m_1}{m_{12}} \boldsymbol{\rho} \right| + A \left| \boldsymbol{\sigma} - \frac{m_3}{m_{34}} \boldsymbol{\lambda} + \frac{m_1}{m_{12}} \boldsymbol{\rho} \right| + B$$

Численные значения параметров взяты из предыдущих расчетов в рамках кварковой модели Фаустова – Галкина:  
 $A = 0.18 \text{ ГэВ}^2$ ,  $B = -0.8 \text{ ГэВ}$ ,  $m_c = 1.55 \text{ ГэВ}$ ,  $m_b = 4.88 \text{ ГэВ}$ .

В других кварковых моделях эти параметры выбираются в несколько ином виде.



# ПРОГРАММА

Для решения задачи был написан код на языке Matlab. Программа была основана на программе К. Варги и Дж. Судзуки, которая была реализована на языке Fortran.

Работа программы начинается с чтения входного файла, в котором указаны массы частиц, заряды и границы интервалов генерации нелинейных вариационных параметров. В программу включены матричные элементы нормировки, кинетической и потенциальной энергий, вычисляемые аналитически. После генерации нелинейных вариационных параметров и вычисления по ним нормировки и энергий вызывается стандартная функция MATLAB для решения задачи на собственные значения.

Результатом работы программы являются численные значения энергий основного и возбужденного состояний, а также матрица нелинейных вариационных параметров и вектор коэффициентов разложения волновой функции по базисным состояниям, которые можно использовать для расчета поправок.

К. Varga, Y. Suzuki Computer Physics Communications **106** (1997) 157-168



# ПРОГРАММА

```
Step 225 Energy1= 0.34863921794723879 Energy2= 1.2536484104053789
Step 226 Energy1= 0.3486354566795799 Energy2= 1.2534924920229267
Step 227 Energy1= 0.3486329325937863 Energy2= 1.2534922094516185
Step 228 Energy1= 0.34863158141900907 Energy2= 1.2534919441516528
Step 229 Energy1= 0.34861948486489164 Energy2= 1.2534728656881666
Step 230 Energy1= 0.34861679193037837 Energy2= 1.2534713043910983
Step 231 Energy1= 0.34861386351792534 Energy2= 1.2534706436140879
Step 232 Energy1= 0.34860201405328872 Energy2= 1.253470580717104
Step 233 Energy1= 0.34859259331505488 Energy2= 1.2534705792551044
Step 234 Energy1= 0.3485887154718576 Energy2= 1.2534635876163653
Step 235 Energy1= 0.34858449840752054 Energy2= 1.2534590631032176
Step 236 Energy1= 0.34858135297863135 Energy2= 1.2534587914987143
Step 237 Energy1= 0.34857726571776021 Energy2= 1.2534582026578063
Step 238 Energy1= 0.34856933940479168 Energy2= 1.2534520870329457
Step 239 Energy1= 0.34856700300196586 Energy2= 1.2534329222172673
Step 240 Energy1= 0.34856286246846052 Energy2= 1.2534327705802952
Step 241 Energy1= 0.34855575564236624 Energy2= 1.253395738063785
Step 242 Energy1= 0.34855421296403682 Energy2= 1.2533957043561041
Step 243 Energy1= 0.34855109511655175 Energy2= 1.2533948500013044
Step 244 Energy1= 0.34854712859076104 Energy2= 1.2532935476092097
Step 245 Energy1= 0.34854519875036771 Energy2= 1.253293270241723
Step 246 Energy1= 0.34854459955772182 Energy2= 1.2532931881773177
Step 247 Energy1= 0.34854080826131839 Energy2= 1.2532753762784528
Step 248 Energy1= 0.34853241768030457 Energy2= 1.2532735733461973
Step 249 Energy1= 0.34853036244703417 Energy2= 1.2532705698522058
Step 250 Energy1= 0.34852948990473476 Energy2= 1.253268058813888
Step 251 Energy1= 0.34852538653799436 Energy2= 1.2532595902718779
Step 252 Energy1= 0.34852474080313295 Energy2= 1.2532583223088665
Step 253 Energy1= 0.34852188804776796 Energy2= 1.253247130547672
Step 254 Energy1= 0.3485204869819335 Energy2= 1.2532464995612862
Step 255 Energy1= 0.34851918070602877 Energy2= 1.2532457734720215
Step 256 Energy1= 0.34851642070243311 Energy2= 1.2532430577686358
Step 257 Energy1= 0.3485033728135048 Energy2= 1.2532292800518314
Step 258 Energy1= 0.34850188783860259 Energy2= 1.2532226417376373
```



# СВЕРХТОНКАЯ СТРУКТУРА СПЕКТРА

Сверхтонкая структура спектра тетракварка определяется парными потенциалами спин-спинового взаимодействия в основном состоянии в виде:

$$\Delta V^{hfs}(\rho, \lambda, \sigma) = a_{12}(\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2) + a_{34}(\mathbf{s}_3\mathbf{s}_4) + a_{13}(\mathbf{s}_1\mathbf{s}_3) + a_{14}(\mathbf{s}_1\mathbf{s}_4) + a_{23}(\mathbf{s}_2\mathbf{s}_3) + a_{24}(\mathbf{s}_2\mathbf{s}_4),$$

$$a_{12} = \frac{16\pi\alpha_{s12}}{9m_1m_2} \delta(|\mathbf{r}_{12}|),$$

$$a_{34} = \frac{16\pi\alpha_{s34}}{9m_3m_4} \delta(|\mathbf{r}_{34}|),$$

$$a_{13} = \frac{32\pi\alpha_{s13}}{9m_1m_3} \delta(|\mathbf{r}_{13}|),$$

$$a_{14} = \frac{32\pi\alpha_{s14}}{9m_1m_4} \delta(|\mathbf{r}_{14}|),$$

$$a_{23} = \frac{32\pi\alpha_{s23}}{9m_2m_3} \delta(|\mathbf{r}_{23}|),$$

$$a_{24} = \frac{32\pi\alpha_{s24}}{9m_2m_4} \delta(|\mathbf{r}_{24}|),$$

$$\langle \delta(|\mathbf{r}_{12}|) \rangle = \frac{8\pi^3}{(B_{22}B_{33} - B_{23}^2)^{3/2}},$$

$$\langle \delta(|\mathbf{r}_{34}|) \rangle = \frac{8\pi^3}{(B_{11}B_{33} - B_{13}^2)^{3/2}},$$

$$\langle \delta(|\mathbf{r}_{13}|) \rangle = \frac{8\pi^3}{(F_1F_2 - F_3^2)^{3/2}}$$

Как показывают численные расчеты, в случае одинаковых кварков и антикварков коэффициенты  $a_{13}$ ,  $a_{14}$ ,  $a_{23}$ ,  $a_{24}$  равны по величине и равны  $a$ . Поэтому при расчете сверхтонкой структуры спектра тетракварков можно использовать следующую упрощенную формулу:

$$\Delta E^{hfs} = \frac{1}{2} \tilde{a}_{12} \left[ s_{12}(s_{12} + 1) - \frac{3}{2} \right] + \frac{1}{2} \tilde{a}_{34} \left[ s_{34}(s_{34} + 1) - \frac{3}{2} \right] + \frac{1}{2} \tilde{a} [s_T(s_T + 1) - s_{12}(s_{12} + 1) - s_{34}(s_{34} + 1)]$$

Если рассматриваются пары кварков со спином 1, то спин тетракварка принимает значения 0, 1, 2, а соответствующие значения энергий равны:

$$\Delta E(s_T = 0) = \frac{1}{4} \tilde{a}_{12} + \frac{1}{4} \tilde{a}_{34} - 2\tilde{a},$$

$$\Delta E(s_T = 1) = \frac{1}{4} \tilde{a}_{12} + \frac{1}{4} \tilde{a}_{34} - \tilde{a},$$

$$\Delta E(s_T = 2) = \frac{1}{4} \tilde{a}_{12} + \frac{1}{4} \tilde{a}_{34} + \tilde{a}$$



# РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА МАССЫ $cc\bar{c}\bar{c}$

$$\alpha_s = \frac{12\pi}{(33 - 2n_f) \text{Ln} \left[ \frac{\mu^2}{\Lambda^2} \right]}$$

$$n_f = 3; \alpha_s = 0.314$$

$$E(\text{MATLAB})=0.347 \text{ GeV}$$

$$\Delta E(s_T = 0) = 6.26 \text{ GeV}$$

$$\Delta E(s_T = 1) = 6.42 \text{ GeV}$$

$$\Delta E(s_T = 2) = 6.73 \text{ GeV}$$

$$n_f = 6; \alpha_s = 0.404$$

$$E(\text{MATLAB})=-0.202 \text{ GeV}$$

$$\Delta E(s_T = 0) = 5.45 \text{ GeV}$$

$$\Delta E(s_T = 1) = 5.75 \text{ GeV}$$

$$\Delta E(s_T = 2) = 6.35 \text{ GeV}$$

	[1] GeV	[2] GeV	[3] GeV	[4] GeV	[5] GeV
$\Delta E(s_T = 0)$	6.190	6.477	5.970	6.897	5.883
$\Delta E(s_T = 1)$	6.271	6.528	6.050	6.899	6.120
$\Delta E(s_T = 2)$	6.367	6.573	6.220	6.959	6.246

1. Faustov, R.N.; Galkin, V.O.; Savchenko, E.M. Heavy Tetraquarks in the Relativistic Quark Model. Universe 2021, 7, 94.
2. Lloyd, R.J.; Vary, J.P. All-charm tetraquarks. Phys. Rev. D 2004, 70, 014009.
3. Berezhnoy, A.V.; Luchinsky, A.V.; Novoselov, A.A. Tetraquarks Composed of 4 Heavy Quarks. Phys. Rev. D 2012, 86, 034004.
4. Wu, J.; Liu, Y.R.; Chen, K.; Liu, X.; Zhu, S.L. Heavy-flavored tetraquark states with the  $QQQ^-Q^-$  configuration. Phys. Rev. D 2018, 97, 094015.
5. Bedolla, M.A.; Ferretti, J.; Roberts, C.D.; Santopinto, E. Spectrum of fully-heavy tetraquarks from a diquark+antidiquark perspective. Eur. Phys. J. C 2020, 80, 1004.



# РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА МАССЫ $bb\bar{b}\bar{b}$

$$n_f = 3; \alpha_s = 0.207$$

$$E(\text{MATLAB}) = -0.573 \text{ GeV}$$

$$\Delta E(s_T = 0) = 18.85 \text{ GeV}$$

$$\Delta E(s_T = 1) = 18.90 \text{ GeV}$$

$$\Delta E(s_T = 2) = 19.01 \text{ GeV}$$

$$n_f = 6; \alpha_s = 0.266$$

$$E(\text{MATLAB}) = -1.188 \text{ GeV}$$

$$\Delta E(s_T = 0) = 18.17 \text{ GeV}$$

$$\Delta E(s_T = 1) = 18.26 \text{ GeV}$$

$$\Delta E(s_T = 2) = 18.44 \text{ GeV}$$

	[1] GeV	[2] GeV	[3] GeV	[4] GeV	[5] GeV
$\Delta E(s_T = 0)$	19.314	18.754	20.155	18.748	19.237
$\Delta E(s_T = 1)$	19.320	18.808	20.212	18.828	19.264
$\Delta E(s_T = 2)$	19.330	18.916	20.243	18.900	19.279

1. Faustov, R.N.; Galkin, V.O.; Savchenko, E.M. Heavy Tetraquarks in the Relativistic Quark Model. Universe 2021, 7, 94.
2. Berezhnoy, A.V.; Luchinsky, A.V.; Novoselov, A.A. Tetraquarks Composed of 4 Heavy Quarks. Phys. Rev. D 2012, 86, 034004.
3. Wu, J.; Liu, Y.R.; Chen, K.; Liu, X.; Zhu, S.L. Heavy-flavored tetraquark states with the  $QQQ^-Q^-$  configuration. Phys. Rev. D 2018, 97, 094015.
4. Bedolla, M.A.; Ferretti, J.; Roberts, C.D.; Santopinto, E. Spectrum of fully-heavy tetraquarks from a diquark+antidiquark perspective. Eur. Phys. J. C 2020, 80, 1004.
5. Jin, X.; Xue, Y.; Huang, H.; Ping, J. Full-heavy tetraquarks in constituent quark models. Eur. Phys. J. C 2020, 80, 1083.



# РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА МАССЫ $bb\bar{c}\bar{c}, cc\bar{b}\bar{b}$

$$n_f = 3; \alpha_{scc} = 0.314$$

$$\alpha_{sbb} = 0.207, \alpha_{sbc} = 0.264$$

$$E(\text{MATLAB}) = 1.803 \text{ GeV}$$

$$\Delta E(s_T = 0) = 14.68 \text{ GeV}$$

$$\Delta E(s_T = 1) = 14.69 \text{ GeV}$$

$$\Delta E(s_T = 2) = 14.71 \text{ GeV}$$

$$n_f = 6; \alpha_{scc} = 0.404,$$

$$\alpha_{sbb} = 0.266, \alpha_{sbc} = 0.340$$

$$E(\text{MATLAB}) = 1.849 \text{ GeV}$$

$$\Delta E(s_T = 0) = 14.74 \text{ GeV}$$

$$\Delta E(s_T = 1) = 14.75 \text{ GeV}$$

$$\Delta E(s_T = 2) = 14.77 \text{ GeV}$$

	[1] GeV	[2] GeV
$\Delta E(s_T = 0)$	12.846	13.496
$\Delta E(s_T = 1)$	12.859	13.560
$\Delta E(s_T = 2)$	12.883	13.595

1. Faustov, R.N.; Galkin, V.O.; Savchenko, E.M. Heavy Tetraquarks in the Relativistic Quark Model. Universe 2021, 7, 94.
2. Wu, J., Liu, Y., Chen, K., Liu, X., Zhu, S. Heavy-flavored tetraquark states with the  $Q\bar{Q}\bar{Q}\bar{Q}$  configuration. Phys. Rev. D, 2018, 97, 094015.