# Точные многочастичные амплитуды из метода Ландау

С.В. Демидов, Д.Г. Левков, Б.Р. Фархтдинов[1]

[1]Институт Ядерных Исследований РАН

Сессия-конференция СЯФ ОФН РАН, посвящённая 70-летию В.А. Рубакова

# Многочастичные амплитуды в $\lambda\phi^4$

## Теория поля

В $3+1$ измерениях $\qquad \mathcal{L} = \frac{(\partial_\mu \phi)^2}{2} - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4}\phi^4, \quad \lambda \ll 1$

На пороге $\qquad \mathcal{A}_{1\to n} \equiv \langle n, \mathbf{p} = \mathbf{0} | \hat{\mathcal{S}}\hat{\phi}(0)|0\rangle =$

$$= \underbrace{n! \left(\frac{\lambda}{8m^2}\right)^{\frac{n-1}{2}}}_{\text{древесный}} \left(1 + \underbrace{\lambda B(n-1)(n-3)}_{\text{однопетлевой}} + \underbrace{\lambda^2 (B^2 n^4/2 + \ldots)}_{\text{двухпетлевой}} + \ldots\right)$$

*Brown, '92* *Voloshin, '92* *Libanov, Rubakov, et al., '94*

Предположение

$$\boxed{\mathcal{A}_{1\to n} = \mathcal{A}^{\text{tree}}_{1\to n} \exp\left(F_{-1}(\lambda n)/\lambda + F_0(\lambda n) + \lambda F_1(\lambda n) + \ldots\right)}$$

$\lambda \to 0$, $\lambda n$ — параметр ('t Hooft)

# Аналог амплитуд в $\lambda x^4$ осцилляторе

## Одномерная квантовая механика

Потенциал $V(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{\lambda x^4}{4}$, $m = \omega = 1$, $\lambda \ll 1$

Матричный элемент $A_n \equiv \langle n|\hat{x}|0\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi_0(x)\, x\, \psi_n(x) =$

$$= \sqrt{\frac{n!}{2}} \left(\frac{\lambda}{16}\right)^{\frac{n-1}{2}} \left(1 - \frac{\lambda}{32}\left(17n^2 + 5n + \ldots\right) + \frac{\lambda^2}{2048}\left(289n^4 + \ldots\right)\right)$$

Например, *Jaeckel, Schenk, 2018*

Хороший полигон для проверки гипотезы

Для WKB по $\lambda$ делается замена $x = y/\sqrt{\lambda}$, $E = e/\lambda$

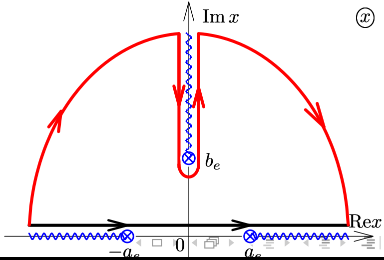
$$-\frac{\lambda^2}{2}\frac{d^2\Psi}{dy^2} + \left(\frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4}\right)\Psi = e\Psi, \; \lambda \to 0$$

$$\Psi(y) = \Psi^+(y) + \Psi^-(y) \quad \text{— декомпозиция ВФ}$$

$$\boxed{A_n = \frac{2}{\lambda}\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty} dy\, \Psi_n^+(y)\, y\, \Psi_0(y) = \frac{4\pi i}{\lambda}\mathrm{Re}\left(\operatorname*{Res}_{y=\infty} \Psi_n^+(y)\, y\, \Psi_0(y)\right)}$$

Точный метод Ландау: Полный ряд WKB даётся $\mathrm{Res}_{y=\infty}$!

Метод для экспоненты:
*Ландау, Лифшиц, Том 3;*
Вычисление в 2 порядках:
*Cornwall, Tiktopoulos, '93*



# Амплитуды перехода

Для рассеяния мы вводим $\lambda(t)$: $\boxed{\lambda \to \lambda_0 \mathrm{e}^{-2\epsilon t}, \ \epsilon \ll 1}$

Адиабатическая теорема: $\boxed{\dfrac{\langle n^{(0)}|T\hat{\mathcal{S}}\hat{x}(0)|0^{(0)}\rangle}{\langle n^{(0)}|T\hat{\mathcal{S}}|0^{(0)}\rangle} \approx \mathrm{e}^{-i\phi} A_n}$

$$\phi = \int_0^\infty dt(E_n(t) - E_0(t) - n)$$ — далее фазу и нормировки опускаем

Интегральная форма записи амплитуды:

$$\boxed{A_n \propto A_n^{\text{tree}} \int d\tau_\infty \mathrm{e}^{\frac{1}{\lambda_0}(\lambda_0 n \tau_\infty)} \int \mathcal{D}y \, y(0) \mathrm{e}^{\frac{1}{\lambda_0}(iS_{BP} + B_f)}}$$

Седловое решение: $\boxed{y_B(t) = \dfrac{i\sqrt{2}\mathrm{e}^{\epsilon t}}{\sin\left(t + i\tau_\infty + i\epsilon t\right)} + \mathcal{O}(\epsilon)}$

# Метод Ландау для амплитуд перехода

Для факторизации $y(0)$ используем метод Фаддеева-Попова

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} dy_0 \delta(y_0 - y(0)) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy_0 \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{dj}{2\pi i \lambda_0} \mathrm{e}^{\frac{j}{\lambda_0}(y_0 - y(0))}$$

$$\boxed{A_n \propto A_n^{\text{tree}} \underbrace{\int dy_0\, y_0}_{\text{вычет } y_0 \to \infty \text{ (Ландау)}} \underbrace{\int dj\, d\tau_\infty \mathrm{e}^{\frac{1}{\lambda_0}(jy_0 + \lambda_0 n \tau_\infty + W_0(j,\tau_\infty)) + W_1(j,\tau_\infty) + \ldots}}_{\text{седловые } \lambda_0 \to 0}}$$

вычет $y_0 \to \infty$ (Ландау) седловые $\lambda_0 \to 0$

Разложение: $W(j,\, \tau_\infty) = \underbrace{W_0(j,\, \tau_\infty)}_{\text{древесный}} + \underbrace{\lambda_0 W_1(j,\, \tau_\infty) + \lambda_0^2 W_2(j,\, \tau_\infty) + \ldots}_{\text{петлевые поправки}}$

$W(j,\, \tau_\infty)$ даётся связными диаграммами в теории с источником

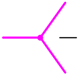
# Седловые уравнения и диаграммная техника

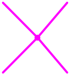
Теория возмущений: $\lambda_0 \ll 1,\ \lambda_0 n \ll 1$

Седловые уравнения:

$$\begin{cases} \ddot{y}_{cl} + y_{cl} + \mathrm{e}^{-2\epsilon t} y_{cl}^3 = -ij\delta(t) \Rightarrow y_{cl} = y_B + jy_1 + \dots \\ \lambda_0 n + \frac{\partial W_0}{\partial \tau_\infty} = 0 \Rightarrow \tau_\infty(j,\ \lambda_0 n) = \tau_0 + (\lambda_0 n)\tau_1 + \dots \\ y_{cl}(0) = y_0 \Rightarrow y_0 = y_0(j,\ \lambda_0 n) \to \infty \text{ в конце вычисления} \end{cases}$$

Ищем $W(j,\ \tau_\infty)$ на фоне $\quad y_B(t) = \dfrac{i\sqrt{2}\mathrm{e}^{\epsilon t}}{\sin\left(t + i\tau_\infty + i\epsilon t\right)}$


$-6iy_B(t)$


$-6i$


$-j\delta(t)$


$G_B(t,\ t')$

Утверждения

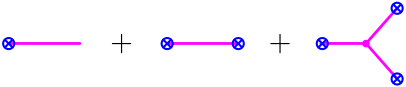
- Вычет метода Ландау: $j,\ \tau_0 \to 0;\ y_0 \to \infty$
- Разложение $y_{cl}$ по $j$ $=$ разложение по $\lambda_0 n$
- Сингулярное решение, но конечная амплитуда

# Сравнение с обычной теорией возмущений

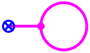
Напоминание:

$$A_n = \mathrm{e}^{i\phi} A_n^{\text{tree}} \mathrm{e}^{\frac{F_{-1}}{\lambda_0} + F_0 + \lambda_0 F_1 + \ldots}, \quad \phi = \int_0^\infty dt (E_n(t) - E_0(t) - n)$$

Вычисления при помощи диаграмм на фоне $y_B$

$F_{-1} =$ 

$$= \lambda_0^2 n^2 \left(-\frac{3i}{16\epsilon} - \frac{17}{32}\right) + \lambda_0^3 n^3 \left(\frac{17i}{256\epsilon} + \frac{125}{256}\right)$$

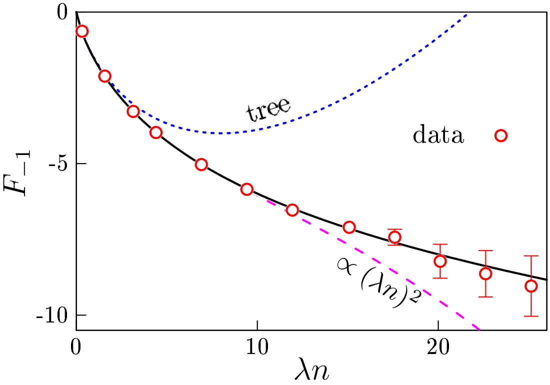
$F_0 =$  +префакторы по $j$, $\tau_\infty = \lambda_0 n \left(-\frac{3i}{16\epsilon} - \frac{5}{32}\right)$

$$E_n(t) = n + \frac{1}{2} + \lambda\left(\frac{3n^2}{8} + \frac{3n}{8} + \ldots\right) + \lambda^2\left(-\frac{17n^3}{64} + \ldots\right) + \mathcal{O}(\lambda^3)$$

Восстанавливают $A_n^{\text{tree}}$ и поправки по $\mathcal{O}(\lambda)$ из работы *Jaeckel, Schenk, 2018!*

# Численная $F_{-1}$ в теории $\lambda\phi^4$

Существует численный метод, позволяющий найти $F_{-1}$, можно сравнить с аналитикой для поправки $\mathcal{O}(\lambda^3 n^3)$




*Demidov, BF, Levkov, 2023*

# Заключение

- Ряд по $\lambda$ на фоне сингулярного классического решения (Брауна) восстанавливает полный ряд теории возмущений
- Доказательство в квантовой механике выступает аргументом в пользу первого утверждения
- Формулу можно проверять порядок за порядком в теории поля

Спасибо за внимание!

Дополнительные слайды

# Подробнее о методе Ландау

Метод делает точным использование техник из ресургентного анализа WKB

$$\Psi(y) = {\color{red}\Psi^+(y)} + \Psi^-(y), \quad \Psi^\pm(y) = \frac{\lambda^{1/4} C_e}{\sqrt{\mathcal{P}(y)}} \mathrm{e}^{\pm i \int_{y_0}^{y} d\tilde{y}\, \mathcal{P}(\tilde{y}) \pm \frac{i\pi}{4}}$$

$\mathcal{P}(y) = p(y) + \lambda^2 p_2(y) + \dots$ — WKB разложение импульса
Построение WKB волновой функции: *Delabaere, Pham, '99*

# Вывод интегрального представления для амплитуд

Используем голоморфное представление для интегральной записи

$$\langle n^{(0)}|T\hat{\mathcal{S}}\hat{x}(0)|0^{(0)}\rangle = \frac{\sqrt{n!}}{2\pi i}\oint \frac{dz_0}{z_0^{n+1}}\langle z_0|T\hat{\mathcal{S}}\hat{x}(0)|0^{(0)}\rangle,\ |z_0\rangle = \frac{\mathrm{e}^{z_0 a^\dagger}}{\sqrt{n!}}|0^{(0)}\rangle$$

# Функциональный интегарл и источник

Сделаем замену $z_0 = \frac{4}{\sqrt{\lambda_0}} \mathrm{e}^{-\tau_\infty}$, также напомним $x = \frac{y}{\sqrt{\lambda_0}}$

$$\boxed{A_n = \mathrm{e}^{i\phi} \frac{\sqrt{n!}}{4} \left(\frac{\lambda_0}{16}\right)^{\frac{n-1}{2}} \int \frac{d\tau_\infty}{2\pi i} \mathrm{e}^{n\tau_\infty} \frac{\int \mathcal{D}y\, y(0) \mathrm{e}^{\frac{1}{\lambda_0}(iS_{BP}+B_f)}}{\int \mathcal{D}y\, \mathrm{e}^{\frac{1}{\lambda_0}(iS_{BP}+B_f)}}},$$

$$S_{BP} = \int dt \left(-\frac{1}{2} y\ddot{y} - \frac{1}{2} y^2 - \frac{\mathrm{e}^{-2\epsilon t}}{4} y^4\right),\ B_f(\tau_\infty)\text{— граничный член}$$

Седловое решение: $\boxed{y_B(t) = \frac{i\sqrt{2}\mathrm{e}^{\epsilon t}}{\sin\left(t + i\tau_\infty + i\epsilon t\right)} + \mathcal{O}(\epsilon)}$

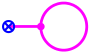
На $y_B$ $S_{BP} = 0,\ B_f = 0$

$$\boxed{A_n = \mathrm{e}^{i\phi} \frac{A_n^{\text{tree}}}{2^{3/2}} \int dy_0\, y_0 \int dj\, d\tau_\infty \mathrm{e}^{\frac{1}{\lambda_0}(jy_0 + \lambda_0 n \tau_\infty)} \frac{Z(j, \tau_\infty)}{Z(0, \tau_\infty)}}$$

$$Z(j,\ \tau_\infty) = \int \mathcal{D}y\, \mathrm{e}^{\frac{i}{\lambda_0}(S_{BP}+B_f - ijy(0))} = \mathrm{e}^{\frac{1}{\lambda_0} W(j, \tau_\infty)}$$

# Явная формула для $F_0$

$$F_0 =$$



$$+\log\left(\frac{\lambda_0 y_0^2}{\sqrt{2}}\sqrt{-\frac{dj}{dx_0}\,\frac{d\tau_\infty}{d\lambda_0 n}}\right) = \lambda_0 n\left(-\frac{3i}{16\epsilon} - \frac{5}{32}\right)$$

# Численный метод в теории поля

Инклюзивная вероятность при фиксированном числе частиц $n$ и энергии $E$

$$\boxed{\mathcal{P}_n(E) \equiv \sum_f \left|\langle f; E, n \left| \hat{\mathcal{S}} \hat{\mathcal{O}} \right| 0 \rangle \right|^2 \sim \mathrm{e}^{F(\lambda n, \varepsilon)/\lambda}, \; \varepsilon \equiv \frac{E}{n} - m}$$

## Метод сингулярных решений

- $\hat{\mathcal{O}}$ малочастичный оператор, который не влияет на $F$ (*Libanov et al., 1994*)
- $\hat{\mathcal{O}} = \exp\left(-\int d^3\mathbf{x} J(\mathbf{x}) \hat{\phi}(0, \mathbf{x}) / \sqrt{\lambda}\right)$
- Ищется седловое решение $\phi_{cl}$ в присутствии $J$
- Вычисляется $F_J(\lambda n, \varepsilon)$ на $\phi_{cl}$ и экстраполируется в $J \to 0$

*Son, '95*

# Амплитуда из сечения на пороге

При помощи метода сингулярных решений можно получить экспоненту амплитуд на пороге $|\mathcal{A}_{1\to n}|$ и сравниться

$$\boxed{|\mathcal{A}_{1\to n}|^2 \sim \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{n!}{\mathcal{V}_n}\mathrm{e}^{F/\lambda} \sim n! m^{4-2n}\mathrm{e}^{2F_{\mathcal{A}}(\lambda n)/\lambda}}$$