$\mathcal{N} = 2$ half-integer higher spins

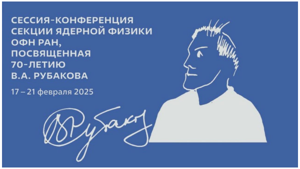
Nikita Zaigraev

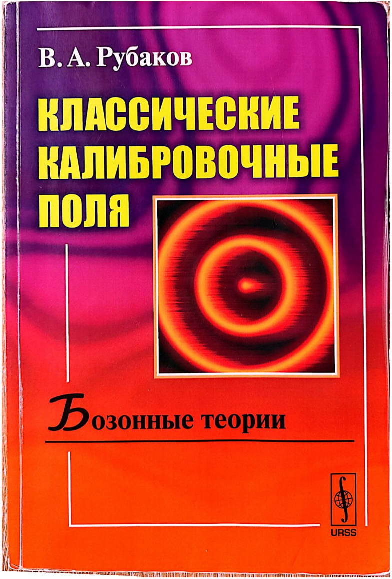
Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR
Moscow Institute of Physics and Technology

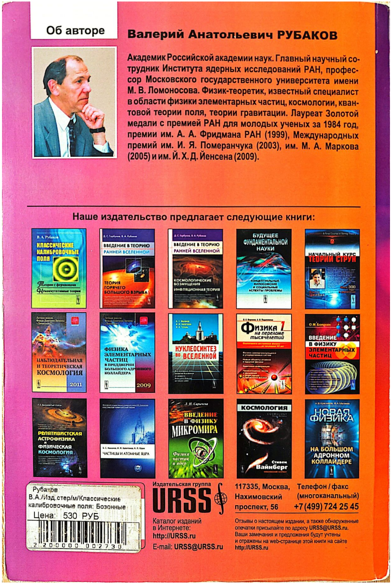
Moscow, February 18, 2025

arxiv:2412.14822, accepted in Physics Letters B

work in progress with E.A. Ivanov




В. А. Рубаков
КЛАССИЧЕСКИЕ КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПОЛЯ
Бозонные теории
URSS


Об авторе
Валерий Анатольевич РУБАКОВ
Академик Российской академии наук. Главный научный сотрудник Института ядерных исследований РАН, профессор Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова. Физик-теоретик, известный специалист в области физики элементарных частиц, космологии, квантовой теории поля, теории гравитации. Лауреат Золотой медали с премией РАН для молодых ученых за 1984 год, премии им. А. А. Фридмана РАН (1999), Международных премий им. И. Я. Померанчука (2003), им. М. А. Маркова (2005) и им. Й. Х. Д. Йенсена (2009).
Наше издательство предлагает следующие книги:
Рубаков В.А./Изд.стер/м/Классические калибровочные поля: Бозонные
Цена: 530 РУБ
Издательская группа URSS
Каталог изданий в Интернете: http://URSS.ru
E-mail: URSS@URSS.ru
117335, Москва, Нахимовский проспект, 56
Телефон / факс (многоканальный) +7 (499) 724 25 45
Отзывы о настоящем издании, а также обнаруженные опечатки присылайте по адресу URSS@URSS.ru. Ваши замечания и предложения будут учтены и отражены на web-странице этой книги на сайте http://URSS.ru

Из (2.31) очевидно, что компенсировать слагаемое с $\partial_\mu \alpha$ можно, добавив к $\partial_\mu \varphi$ слагаемое типа φA. Так мы приходим к выражению

$$\boxed{D_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi - ieA_\mu \varphi = (\partial_\mu - ieA_\mu)\varphi.} \tag{2.33}$$

Эту величину называют ковариантной производной поля φ. Проверим соотношение (2.32). Имеем

$$(D_\mu \varphi)' = \partial_\mu \varphi' - ieA'_\mu \varphi' =$$
$$= e^{i\alpha}\partial_\mu \varphi + e^{i\alpha}\varphi i \partial_\mu \alpha - ieA_\mu e^{i\alpha}\varphi - ie\frac{1}{e}\partial_\mu \alpha e^{i\alpha}\varphi = e^{i\alpha} D_\mu \varphi.$$

Таким образом, соотношение (2.32) выполнено, и $(D_\mu \varphi)^* D_\mu \varphi$ является калибровочным инвариантом.

Действие, инвариантное относительно калибровочных преобразований (2.30), выберем в виде

$$S = \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + (D_\mu \varphi)^* D_\mu \varphi - m^2 \varphi^* \varphi \right] \tag{2.34}$$

(можно было бы еще добавить самодействие скалярного поля $V_I(\varphi^*\varphi)$). Нелинейные (степени выше второй по полям) слагаемые в этом действии возникают из-за члена $A_\mu \varphi$ в $D_\mu \varphi$ и имеют структуру $A_\mu \varphi^* \partial_\mu \varphi$ и $A_\mu A_\mu \varphi^* \varphi$.

Варьируя действие (2.34) по полю A_μ, получим уравнение (2.26) с током

$$j_\mu = -i(\varphi^* \partial_\mu \varphi - \partial_\mu \varphi^* \varphi) - 2eA_\mu \varphi^* \varphi,$$

который может быть записан в явно калибровочно инвариантном виде

$$j_\mu = -i\left[\varphi^* D_\mu \varphi - (D_\mu \varphi)^* \varphi\right]. \tag{2.35}$$

Отметим, что если поле φ^* считать независимым, то для него ковариантная производная будет иметь вид $D_\mu \varphi^* = (\partial_\mu + ieA_\mu)\varphi^*$ (знак перед ieA_μ диктуется требованием $(D_\mu \varphi^*)' = e^{-i\alpha} D_\mu \varphi^*$ и законом преобразования (2.30)), что совпадает с $(D_\mu \varphi)^*$. Мы не будем в дальнейшем различать $(D_\mu \varphi)^*$ и $D_\mu \varphi^*$ (поскольку это одно и то же).

Найдем теперь уравнение скалярного поля. Варьируя, как обычно, по φ^*, имеем

$$D_\mu D_\mu \varphi + m^2 \varphi = 0, \tag{2.36}$$

где, разумеется, $D_\mu D_\mu$ определено вполне аналогично (2.33):

$$D_\mu D_\mu \varphi = (\partial_\mu - ieA_\mu)(\partial_\mu - ieA_\mu)\varphi.$$

Проверим, что при учете уравнения (2.36) ток (2.35) сохраняется. Имеем

$$\partial_\mu j_\mu = -i\left[\partial_\mu \varphi^* D_\mu \varphi + \varphi^* \partial_\mu D_\mu \varphi - (D_\mu \varphi)^* \partial_\mu \varphi - \partial_\mu D_\mu \varphi^* \varphi\right].$$

к которой легкие кварки образуют триплет

$$\begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}.$$

Первую и вторую $SU(3)$ обозначают $SU(3)_c$ и $SU(3)_f$, соответственно. Группа $SU(3)_f$ — не точная: массовые члены, а также электромагнитные и слабые взаимодействия не инвариантны относительно нее.

4.2. Неабелева калибровочная инвариантность и калибровочные поля: группа $SU(2)$

Наша цель — обобщить конструкцию, изложенную в разделе 2.7 для скалярной электродинамики с калибровочной группой $U(1)$ на случай неабелевой калибровочной группы (Янг, Миллс, 1954). Рассмотрим снова теорию двух комплексных скалярных полей, образующих столбец

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix},$$

лагранжиан которой имеет вид

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi^\dagger \partial_\mu \varphi - m^2 \varphi^\dagger \varphi - \lambda(\varphi^\dagger \varphi)^2. \tag{4.17}$$

Этот лагранжиан инвариантен относительно глобальных преобразований из группы $SU(2)$,

$$\varphi(x) \to \varphi'(x) = \omega \varphi(x), \quad \omega \in SU(2),$$

причем ω не зависит от точки пространства-времени.

Постараемся модифицировать лагранжиан (4.17) так, чтобы он был инвариантен относительно преобразований $SU(2)$, произвольным образом зависящих от точки пространства-времени,

$$\varphi(x) \to \varphi'(x) = \omega(x)\varphi(x), \tag{4.18}$$
$$\omega(x) \in SU(2). \tag{4.19}$$

(Напомним, что аналогичное требование в скалярной электродинамике приводило к замене в лагранжиане обычной производной на ковариантную, $\partial_\mu \varphi \to (\partial_\mu - ieA_\mu)\varphi$.) Потенциальные слагаемые (последние два слагаемых в (4.17)) инвариантны относительно преобразований (4.18), но кинетический (содержащий производные) член неинвариантен. Действительно, при преобразовании (4.18) производная поля переходит в

$$\partial_\mu \varphi'(x) = \omega(x) \cdot \partial_\mu \varphi(x) + \partial_\mu \omega(x) \cdot \varphi(x) \tag{4.20}$$

и в лагранжиане $\mathcal{L}(\varphi')$ возникают члены с $\partial_\mu \omega$. Чтобы избавиться от этих членов, заменим в лагранжиане (4.17) обычную производную на ковариантную, $\partial_\mu \varphi \to D_\mu \varphi$, и потребуем, чтобы при преобразованиях (4.18) она

- Harmonic superspace [Galperin, Ivanov, Kalitsyn, Ogievetsky, Sokatchev 1984] is the universal method to deal with off-shell $\mathcal{N}=2$ supersymmetry theories:

$$\mathbb{HR}^{4+2|8} = \mathbb{R}^{4|8} \times S^2 = \{x^{\alpha\dot{\alpha}}, \theta^{\alpha i}, \bar{\theta}^{\dot{\alpha} i}, u_i^{\pm}\}.$$

- Introduction of harmonic coordinates lead to the presence of a new supersymmetric invariant superspace – analytic superspace, with coordinates $\zeta = \{x_A^{\alpha\dot{\alpha}}, \theta^{+\alpha}, \bar{\theta}^{+\dot{\alpha}}, u_i^{\pm}\}$, where analytic coordinates defined as

$$x_A^{\alpha\dot{\alpha}} := x^{\alpha\dot{\alpha}} - 4i\theta^{\alpha(i}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}j)}u_i^+u_j^-, \quad \theta^{+\alpha} := \theta^{\alpha i}u_i^+, \quad \bar{\theta}^{+\dot{\alpha}} := \bar{\theta}^{\dot{\alpha} i}u_i^+.$$

- One can also define *harmonic derivatives* $\partial^{\pm\pm} = u^{\pm i}\frac{\partial}{\partial u^{\mp i}}$, which in the analytical basis take the form:

$$\mathcal{D}^{\pm\pm} := \partial^{\pm\pm} - 4i\theta^{\alpha\pm}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}\pm}\partial_{\alpha\dot{\alpha}} + \theta^{\pm\hat{\alpha}}\partial^{\pm}_{\hat{\alpha}}.$$

- $\mathcal{N}=2$ higher-spin theories (see talk by E.Ivanov) have natural geometric formulation in terms of unconstrained analytical prepotentials [Buchbinder, Ivanov, N.Z. 2021]:

$$\left\{h^{++\alpha(s-1)\dot{\alpha}(s-1)}, h^{++\alpha(s-1)\dot{\alpha}(s-2)+}, h^{++\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-1)+}, h^{++\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-2)}\right\}.$$

- These prepotentials are the higher-spin generalization of linearized (over flat $\mathcal{N}=2$ harmonic superspace) $\mathcal{N}=2$ "minimal" Einstein supergravity ($s=2$ case).
- These higher-spin prepotentials covariantize harmonic derivative with respect to the higher-spin $\mathcal{N}=2$ supersymmetry:

$$\mathcal{D}^{++} \quad \to \quad \mathcal{D}^{++} + \kappa_s h^{++\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-2)M}\partial_M\partial^{s-2}_{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-2)}(J)^{P(s)},$$

and so naturally interact with the hypermultiplet.

- $\mathcal{N}=4$ vector multiplet $\left[(1),4(\frac{1}{2}),6(0)\right]$ in the $\mathcal{N}=2$ harmonic superspace is described by the action:

$$\boxed{S^{\mathcal{N}=4}=\frac{1}{4}\int d^4x d^8\theta du\; V^{++}V^{--}-\frac{1}{2}\int d\zeta^{(-4)}q^{+a}\mathcal{D}^{++}q^{+}_{a}.}$$

- Here $q^{+a}=(\tilde{q}^{+},q^{+})$ is the hypermutiplet $[2(\frac{1}{2}),4(0)]$ superfield:

$$q^{+}=f^{i}u^{+}_{i}+\theta^{+\alpha}\psi_{\alpha}+\bar{\theta}^{+}_{\dot{\alpha}}\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}+4i\theta^{+\alpha}\bar{\theta}^{+\dot{\alpha}}\partial_{\alpha\dot{\alpha}}f^{i}u^{-}_{i}+\dots$$

- The analytic superfield V^{++} with gauge freedom $\delta^{(0)}_{\lambda}V^{++}=\mathcal{D}^{++}\lambda$ describes $\mathcal{N}=2$ vector multiplet $[(1),2(\frac{1}{2}),2(0)]$:

$$\begin{aligned}V^{++}_{WZ}=&i(\theta^{+})^2\phi-i(\bar{\theta}^{+})^2\bar{\phi}-4i\theta^{+\alpha}\bar{\theta}^{+\dot{\alpha}}A_{\alpha\dot{\alpha}}\\&+(\bar{\theta}^{+})^2\theta^{+\alpha}\psi^{i}_{\alpha}+(\theta^{+})^2\bar{\theta}^{+\dot{\alpha}}\bar{\psi}^{i}_{\dot{\alpha}}u^{-}_{i}+(\theta^{+})^4D^{(ij)}u^{-}_{i}u^{-}_{j}.\end{aligned}$$

- The V^{--} superfield is defined as the solution of the zero curvature equation

$$\mathcal{D}^{++}V^{--}=\mathcal{D}^{--}V^{++}.$$

- The action is manifestly invariant under $\mathcal{N}=2$ supersymmetry ($\epsilon^{\pm}_{\hat{\alpha}}:=\epsilon^{i}_{\hat{\alpha}}u^{\pm}_{i}$):

$$\delta_\epsilon V^{++}=0,\qquad \delta_\epsilon q^{+}_{a}=0,$$

which is realized on coordinates as:

$$\delta_\epsilon x_{\alpha\dot{\alpha}}=-4i\left(\epsilon^{-}_{\alpha}\bar{\theta}^{+}_{\dot{\alpha}}+\theta^{+}_{\alpha}\bar{\epsilon}^{-}_{\dot{\alpha}}\right),\quad \delta_\epsilon\theta^{+}_{\alpha}=\epsilon^{+}_{\alpha},\quad \delta_\epsilon\bar{\theta}^{+}_{\dot{\alpha}}=\bar{\epsilon}^{+}_{\dot{\alpha}}.$$

$$\boxed{S^{\mathcal{N}=4} = \frac{1}{4}\int d^4x d^8\theta du\ V^{++}V^{--} - \frac{1}{2}\int d\zeta^{(-4)} q^{+a}\mathcal{D}^{++}q^{+}_{a}.}$$

- This action is invariant under global transformations

$$\delta_\varepsilon V^{++} = (\varepsilon^{\alpha a}\theta^{+}_{\alpha} + \bar{\varepsilon}^{a}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{+\dot{\alpha}})q^{+}_{a},$$
$$\delta_\varepsilon q^{+}_{a} = -\frac{1}{2}(\mathcal{D}^{+})^4\left[(\varepsilon^{\alpha}_{a}\theta^{-}_{\alpha} + \bar{\varepsilon}_{a\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{-\dot{\alpha}})V^{--}\right]$$

with rigid fermionic parameters $\varepsilon^{\alpha a}$ and $\bar{\varepsilon}^{\dot{\alpha}a} = \widetilde{\varepsilon^{\alpha a}}$. These transformations corresponds to extra (hidden) supersymmetries.

- Corresponding analytic $\mathcal{N} = 2$ supercurrent:

$$\mathcal{J}^{++a}_{\alpha} = \frac{1}{2}(\mathcal{D}^{+})^4\left(q^{+a}\theta^{-}_{\alpha}V^{--}\right) = \frac{1}{32}q^{+a}(\mathcal{D}^{+})^2\left(\theta^{-}_{\alpha}\mathcal{W}\right) \approx \frac{1}{16}q^{+a}\mathcal{D}^{+}_{\alpha}\mathcal{W}$$

satisfy conservation equation:

$$\mathcal{D}^{++}\mathcal{J}^{++a}_{\alpha} \approx 0.$$

Hidden R symmetries

$$\boxed{S^{\mathcal{N}=4} = \frac{1}{4}\int d^4x d^8\theta du \; V^{++}V^{--} - \frac{1}{2}\int d\zeta^{(-4)} q^{+a}\mathcal{D}^{++}q^+_a \,.}$$

- There is another class of global symmetries [Buchbinder, Ivanov, Ivanovskiy 2020]:

$$\delta_r V^{++} = 2\left(r^{-a}(\theta^+)^2 + \bar{r}^{-a}(\bar{\theta}^+)^2\right) q^+_a \,,$$
$$\delta_r q^+_a = -\frac{1}{2}(\mathcal{D}^+)^4\left[\left\{r^+_a(\theta^-)^2 - 2r^-_a(\theta^+\theta^-) + \bar{r}^+_a(\bar{\theta}^-)^2 - 2\bar{r}^-_a(\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-)\right\}V^{--}\right]$$

  with rigid parameters $r^{\pm a} = r^{ai}u^\pm_i$. These transformations corresponds to hidden R-symmetries and extend the $R-$symmetry group from $SU(2)_R \times SU(2)_{PG}$ to $SU(4)$.
- Corresponding analytic $\mathcal{N} = 2$ supercurrent

$$\mathcal{J}^{+a} = \frac{1}{2}(\mathcal{D}^+)^4\left(q^{+a}(\theta^-)^2 V^{--}\right) \approx \frac{1}{8}q^{+a}\mathcal{W} + \frac{1}{8}q^{+a}\theta^{-\alpha}\mathcal{D}^+_\alpha\mathcal{W}$$

  satisfy conservation equation:

$$\mathcal{D}^{++}\mathcal{J}^{+a} \approx 2\theta^{+\alpha}\mathcal{J}^{++a}_\alpha, \qquad (\mathcal{D}^{++})^2\mathcal{J}^{+a} \approx 0.$$

Hidden higher-spin supersymmetry

$$\boxed{S^{\mathcal{N}=4} = \frac{1}{4}\int d^4x d^8\theta du\ V^{++}V^{--} - \frac{1}{2}\int d\zeta^{(-4)} q^{+a}\mathcal{D}^{++}q^{+}_{a}.}$$

- Higher-spin supersymmetry:

$$\delta_\varepsilon V^{++} = (-1)^s \partial^s_{\alpha(s)\dot\alpha(s)}\left[\left(\varepsilon^{\alpha(s+1)\dot\alpha(s)a}\theta^+_\alpha - \bar\varepsilon^{\alpha(s)\dot\alpha(s+1)a}\bar\theta^+_{\dot\alpha}\right) q^+_a\right],$$
$$\delta_\varepsilon q^+_a = -\frac{1}{2}(\mathcal{D}^+)^4\left[(\varepsilon_a^{\alpha(s+1)\dot\alpha(s)}\theta^-_\alpha - \bar\varepsilon_a^{\alpha(s)\dot\alpha(s+1)}\bar\theta^-_{\dot\alpha})\partial^s_{\alpha(s)\dot\alpha(s)}V^{--}\right]$$

with rigid fermionic parameters.

- Corresponding analytic $\mathcal{N}=2$ higher-spin supercurrent:

$$\mathcal{J}^{++a}_{\alpha(s+1)\dot\alpha(s)} = \frac{1}{2}(\mathcal{D}^+)^4\left(q^{+a}\theta^-_{(\alpha}\partial^s_{\alpha(s))\dot\alpha(s)}V^{--}\right) \approx \frac{1}{16}q^{+a}\mathcal{D}^+_{(\alpha}\partial^s_{\alpha(s))\dot\alpha(s)}\mathcal{W}$$

satisfy conservation equation:

$$\mathcal{D}^{++}\mathcal{J}^{++a}_{\alpha(s+1)\dot\alpha(s)} \approx 0.$$

Hidden higher-spin R symmetries

$$\boxed{S^{\mathcal{N}=4} = \frac{1}{4}\int d^4x d^8\theta du\; V^{++}V^{--} - \frac{1}{2}\int d\zeta^{(-4)} q^{+a}\mathcal{D}^{++}q^{+}_{a}.}$$

- Higher-spin R-symmetries:

$$\delta_r V^{++} = (-1)^s \partial^s_{\alpha(s)\dot\alpha(s)}\left[2\left(r^{\alpha(s)\dot\alpha(s)-a}(\theta^+)^2 + \bar r^{\alpha(s)\dot\alpha(s)-a}(\bar\theta^+)^2\right)q^+_a\right],$$

$$\delta_r q^+_a = -\frac{1}{2}(\mathcal{D}^+)^4\Big[\Big\{r_a^{\alpha(s)\dot\alpha(s)+}(\theta^-)^2 - 2r_a^{\alpha(s)\dot\alpha(s)-}(\theta^+\theta^-)$$
$$+ \bar r_a^{\alpha(s)\dot\alpha(s)+}(\bar\theta^-)^2 - 2\bar r_a^{\alpha(s)\dot\alpha(s)-}(\bar\theta^+\bar\theta^-)\Big\}\partial^s_{\alpha(s)\dot\alpha(s)}V^{--}\Big]$$

  with rigid parameters $r^{\pm a}_{\alpha(s)\dot\alpha(s)} = r^{ai}_{\alpha(s)\dot\alpha(s)}u^{\pm}_i$.

- Corresponding analytic $\mathcal{N}=2$ higher-spin supercurrent

$$\mathcal{J}^{+a}_{\alpha(s)\dot\alpha(s)} = \frac{1}{2}(\mathcal{D}^+)^4\left(q^{+a}(\theta^-)^2\partial^s_{\alpha(s)\dot\alpha(s)}V^{--}\right)$$
$$\approx \frac{1}{8}q^{+a}\partial^s_{\alpha(s)\dot\alpha(s)}\mathcal{W} + \frac{1}{8}q^{+a}\theta^{-\alpha}\mathcal{D}^+_\alpha\partial^s_{\alpha(s)\dot\alpha(s)}\mathcal{W}$$

  satisfy conservation equation:

$$\mathcal{D}^{++}\mathcal{J}^{+a}_{\alpha(s)\dot\alpha(s)} \approx 2\theta^{+\alpha}\mathcal{J}^{++a}_{\alpha(s+1)\dot\alpha(s)}, \qquad (\mathcal{D}^{++})^2\mathcal{J}^{+a}_{\alpha(s)\dot\alpha(s)} \approx 0.$$

Analytic $\mathcal{N}=2$ gravitino prepotentials

- We introduce unconstrained analytic prepotentials $h_a^{++\alpha}$ and h_a^{+++} with gauge transformations:

$$\delta_\lambda h_a^{++\alpha} = \mathcal{D}^{++}\lambda_a^\alpha + 2\theta^{+\alpha}\lambda_a^+, \qquad \delta_\lambda h_a^{+++} = \mathcal{D}^{++}\lambda_a^+.$$

- One can construct the cubic interaction

$$S_{int} = -\kappa \int d\zeta^{-4} \left[h^{+++a}\mathcal{J}_a^+ + h^{++\alpha a}\mathcal{J}_{\alpha a}^{++} + (\,\widetilde{}\ \text{conj}) \right].$$

- Requirement of invariance under rigid $\mathcal{N}=2$ supersymmetry lead to supersymmetry transformations of analytic prepotentials:

$$\delta_\epsilon \mathcal{J}_a^+ = 2\epsilon^{-\alpha}\mathcal{J}_{\alpha a}^{++}, \quad \delta_\epsilon \mathcal{J}_{\alpha a}^{++} = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta_\epsilon h^{++\alpha a} = -2\epsilon^{-\alpha} h^{+++a}, \quad \delta_\epsilon h^{+++a} = 0.$$

- Full action $S^{\mathcal{N}=4} + S_{int}$ is gauge invariant in the first order on coupling constant κ.
- Due to the gauge invariance (in zero order in κ) of $\mathcal{N}=2$ supercurrents

$$\delta_\lambda^{(0)}\mathcal{J}_\alpha^{++a} = \frac{1}{2}(\mathcal{D}^+)^4\left(q^{+a}\theta_\alpha^-\mathcal{D}^{--}\lambda\right) = 0, \qquad \delta_\lambda^{(0)}\mathcal{J}_a^+ = \frac{1}{2}(\mathcal{D}^+)^4\left(q^{+a}(\theta^-)^2\mathcal{D}^{--}\lambda\right) = 0$$

we obtain cubic $(\mathbf{\tfrac{3}{2}}, \mathbf{1}, \mathbf{\tfrac{1}{2}})$ coupling, consistent in the leading order.

Wess-Zumino type gauge

- Using gauge freedom

$$\delta_\lambda h^{++\alpha} = \mathcal{D}^{++}\lambda^\alpha + 2\theta^{+\alpha}\lambda^+, \qquad \delta_\lambda h^{+++} = \mathcal{D}^{++}\lambda^+.$$

one can impose the Wess-Zumino type gauge:

$$\begin{aligned} h^{++\alpha}_{WZ} &= (\bar\theta^+)^2\psi^\alpha - 4i\theta^{+\beta}\bar\theta^{+\dot\beta}\Psi^\alpha_{\beta\dot\beta} + 8i(\theta^+)^2\bar\theta^{+\dot\beta}C^{\alpha i}_{\dot\beta}u^-_i \\ &\quad + (\bar\theta^+)^2\theta^{+\alpha}F^i u^-_i + (\bar\theta^+)^2\theta^{+\beta}\mathcal{F}^{\alpha)i}_{(\beta}u^-_i + (\theta^+)^4 D^{\alpha(ij)}u^-_i u^-_j, \\ h^{+++}_{WZ} &= (\theta^+)^2\bar\theta^{+\dot\beta}\bar\rho_{\dot\beta} - 4(\bar\theta^+)^2\theta^{+\beta}\kappa_\beta + (\theta^+)^4 C^i u^-_i . \end{aligned}$$

- In this gauge residual gauge freedom spanned by parameters:

$$\begin{aligned} \lambda^\alpha &= \epsilon^\alpha + 2\theta^{+\alpha}c^i u^-_i, \\ \lambda^+ &= c^i u^+_i + 2i\bar\theta^{+\dot\beta}\bar\eta_{\dot\beta} + 4i\theta^{+\rho}\bar\theta^{+\dot\rho}\partial_{\rho\dot\rho}c^i u^-_i . \end{aligned}$$

- Residual gauge transformations acts on fields in the WZ gauge as:

$$\delta_\lambda C^i_{\beta\dot\beta} = \partial_{\beta\dot\beta}c^i, \qquad \delta_\lambda C^i = 2\Box c^i, \qquad \delta_\lambda \Psi^\alpha_{\beta\dot\beta} = \partial_{\beta\dot\beta}\epsilon^\alpha + \delta^\beta_\rho\bar\eta_{\dot\rho}, \qquad \delta_\lambda\kappa_\beta = \partial^{\dot\beta}_\beta\bar\eta_{\dot\beta}.$$

Obtained transformations law means that $C^i_{\beta\dot\beta}$ is the doublet of spin 1 gauge fields, $\Psi^\alpha_{\beta\dot\beta}$ is the conformal gravitino field.

- Other fields with non-trivial gauge transformations can be redefined in terms of $\Psi^{\alpha}_{\beta\dot{\beta}}$ and $C^{i}_{\beta\dot{\beta}}$ fields and corresponds to auxiliary fields.
- For the bosonic field C^i the redefinition is given by

$$C^i = 4\partial^{\beta\dot{\beta}} C^i_{\beta\dot{\beta}} + G^i$$

so we extract the auxiliary field G^i.

- For conformal gravitino, using parameter $\bar{\eta}_{\dot{\alpha}}$ (which can be interpreted as parameter of local conformal supersymmetry) one can impose symmetric gauge for spin $\frac{3}{2}$ field $\Psi_{(\rho\beta)\dot{\rho}}$. In this gauge:

$$\delta\Psi_{(\alpha\beta)\dot{\alpha}} = \partial_{(\alpha\dot{\alpha}}\epsilon_{\beta)} \qquad \Rightarrow \qquad \kappa_\beta = -\frac{1}{6}\left(\partial^{\alpha\dot{\alpha}}\Psi_{(\alpha\beta)\dot{\alpha}}\right) + \chi_\beta .$$

- As the result, we obtain off-shell content of the conformal spin $\mathbf{\frac{3}{2}}$ supermultiplet:

$$\begin{aligned} \text{Gauge sector:} \qquad & \Psi_{(\alpha\beta)\dot{\alpha}}, C^i_{\alpha\dot{\alpha}}; \\ \text{Non-gauge sector:} \qquad & \psi_\alpha, \rho_\alpha, \chi_\alpha, G^i, F^i, \mathcal{F}^{(\alpha\beta)i}, D^{\alpha(ij)}. \end{aligned}$$

Total in the multiplet there are $\mathbf{32_B} + \mathbf{32_F}$ off-shell degrees of freedom.

- We fix the canonical dimension for the gravitino field $[\Psi_{(\alpha\beta)\dot{\alpha}}] = \frac{3}{2}$, then the vector field has non-canonical dimension $[C^i_{\alpha\dot{\alpha}}] = 2$. From here we obtain prepotential dimensions $[h^{++\alpha}] = \frac{1}{2}$, $[h^{+++}] = 1$ and coupling constant dimension $[\kappa] = -1$.

Conformal gravitino action

- Thus, from the dimensional analysis, it can be expected that the free $\mathcal{N}=2$ conformal gravitino action in components contain conformal gravitino action with three derivatives and standard Maxwell action for doublet of vector fields.

- Desired gauge-invariant action for conformal gravitino can be constructed in terms of gauge-invariant strengths:

$$\check{C}_{(\dot\alpha\dot\beta\dot\gamma)} := \partial^{\alpha}_{(\dot\alpha}\partial^{\beta}_{\dot\beta}\Psi_{(\alpha\beta)\dot\gamma)}, \qquad \hat{C}_{(\alpha\beta\gamma)} := \partial^{\dot\rho}_{(\alpha}\Psi_{\beta\gamma)\dot\rho},$$

$$S^{\frac{3}{2}}_{conf} = \int d^4x \, \left(\hat{C}^{(\alpha\beta\gamma)}\check{\bar{C}}_{(\alpha\beta\gamma)} + \check{C}_{(\dot\alpha\dot\beta\dot\gamma)}\hat{\bar{C}}^{(\dot\alpha\dot\beta\dot\gamma)}\right).$$

Supersymmetry invariant superfields and zero curvature equations

- Analytic prepotential $h^{++\alpha}$ have nontrivial transformation law under rigid supersymmetry. One can introduce supersymmetry invariant superfields:

$$G^{++\alpha} = h^{++\alpha} + 2\theta^{-\alpha} h^{+++}, \qquad G^{+++} = h^{+++}.$$

- Corresponding gauge transformations are

$$\delta_\lambda G^{++\alpha} = \mathcal{D}^{++}\Lambda^{\alpha}, \qquad \delta_\lambda G^{+++} = \mathcal{D}^{++}\Lambda^{+},$$

  were gauge parameters are defined as

$$\Lambda^{\alpha} = \lambda^{\alpha} + 2\theta^{-\alpha}\lambda^{+}, \qquad \Lambda^{+} = \lambda^{+}.$$

- As the solutions of zero curvature equations one can construct set of negatively charged potentials:

$$\mathcal{D}^{++} G^{--\alpha} = \mathcal{D}^{--} G^{++\alpha},$$
$$\mathcal{D}^{++} G^{--+} = \mathcal{D}^{--} G^{+++},$$
$$\mathcal{D}^{++} G^{---} = G^{--+}.$$

- Zero curvature equations are invariant under gauge transformations, accompanied by gauge transformation laws of negatively charged potentials:

$$\delta_\lambda G^{--\alpha} = \mathcal{D}^{--}\Lambda^{\alpha},$$
$$\delta_\lambda G^{--+} = \mathcal{D}^{--}\Lambda^{+} - \Lambda^{-},$$
$$\delta_\lambda G^{---} = \mathcal{D}^{--}\Lambda^{-},$$

  where parameter Λ^{-} satisfy equation $\mathcal{D}^{++}\Lambda^{-} = \Lambda^{+}$.

$\mathcal{N} = 2$ gravitino supercurvatures

- Using negatively charged potentials one can construct two gauge-invariant superfield strengths:
$$\hat{\mathcal{W}}_\alpha = (\bar{\mathcal{D}}^+)^2 G^{--}_\alpha, \qquad \check{\hat{\mathcal{W}}}_\alpha = (\bar{\mathcal{D}}^+)^2 \bar{\mathcal{H}}^{--}_\alpha.$$
- Second superstrength have interesting geometric structure, analogous to structure of linearized $\mathcal{N} = 2$ super Weyl tensor [Ivanov, N.Z. 2024]. We start with composite object, which satisfy "half-analyticity" condition:
$$\bar{\mathcal{H}}^{++}_\alpha = \partial_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{G}^{++\dot{\alpha}} + \frac{i}{2}\mathcal{D}^-_\alpha \bar{G}^{+++}, \qquad \bar{\mathcal{D}}^+_{\dot{\alpha}} \bar{\mathcal{H}}^{++}_\alpha = 0.$$
Using zero curvature equation, one construct $\bar{\mathcal{H}}^{--}_\alpha$
$$\mathcal{D}^{++}\bar{\mathcal{H}}^{--}_\alpha = \mathcal{D}^{--}\bar{\mathcal{H}}^{++}_\alpha \quad \Rightarrow \quad \bar{\mathcal{H}}^{--}_\alpha = \partial_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{G}^{--\dot{\alpha}} + \frac{i}{2}\mathcal{D}^-_\alpha \bar{G}^{--+} - \frac{i}{2}\mathcal{D}^+_\alpha \bar{G}^{---}.$$
    - *Harmonic independence*:
$$\mathcal{D}^{\pm\pm}\hat{\mathcal{W}}_\alpha = 0, \qquad \mathcal{D}^{\pm\pm}\check{\hat{\mathcal{W}}}_\alpha = 0.$$
    - *Chirality*:
$$\bar{\mathcal{D}}^\pm_{\dot{\alpha}}\hat{\mathcal{W}}_\alpha = 0, \qquad \bar{\mathcal{D}}^\pm_{\dot{\alpha}}\check{\hat{\mathcal{W}}}_\alpha = 0.$$

$\mathcal{N}=2$ superfield action

- Since dimensions of superfield strength $[\hat{\mathcal{W}}_\alpha]=\frac{3}{2}$, $[\check{\hat{\mathcal{W}}}_\alpha]=\frac{5}{2}$ we obtain component composition in the gauge sector:

$$\hat{\mathcal{W}}_\alpha \sim \theta^{+(\beta}\theta^{-\gamma)}\hat{C}_{(\alpha\beta\gamma)} + (\theta^-)^2\theta^{+\beta}\mathcal{F}^i_{(\alpha\beta)}u^+_i + (\theta^+)^2\theta^{-\beta}\mathcal{F}^i_{(\alpha\beta)}u^-_i + \dots,$$

$$\check{\hat{\mathcal{W}}}_\alpha \sim \theta^{+\beta}\bar{\mathcal{F}}^i_{(\alpha\beta)}u^-_i - \theta^{-\beta}\bar{\mathcal{F}}^i_{(\alpha\beta)}u^+_i + \theta^{+(\beta}\theta^{-\gamma)}\check{\hat{C}}_{(\alpha\beta\gamma)} + \dots.$$

- Since $\hat{\mathcal{W}}^\alpha$ and $\check{\hat{\mathcal{W}}}_\alpha$ are chiral superstrengths, we can construct invariant action in chiral superspace:

$$S=\int d^4x d^4\theta\, \hat{\mathcal{W}}^\alpha \check{\hat{\mathcal{W}}}_\alpha + c.c.$$

  In gauge sector, this action gives (up to numerical coefficients):

$$S=\int d^4x\, \left(\hat{C}^{(\alpha\beta\gamma)}\check{\hat{C}}_{(\alpha\beta\gamma)} + \mathcal{F}^{(\alpha\beta)}_i \bar{\mathcal{F}}^i_{(\alpha\beta)}\right) + c.c.$$

- The action can be presented in a different form – as the integral over full harmonic superspace:

$$S=\int d^4x d^8\theta du\, \left[G^{++\alpha}\bar{\mathcal{H}}^{--}_\alpha - \bar{G}^{++}_{\dot\alpha}\mathcal{H}^{--\dot\alpha}\right].$$

- We introduce auxiliary coordinates Ψ^α and ω^+:

$$\mathfrak{D}^{++}_{gravitino} = \mathcal{D}^{++} + h^{++\alpha}(\zeta)\frac{\partial}{\partial\Psi^\alpha} + h^{+++}(\zeta)\frac{\partial}{\partial\omega^+} - 2\theta^{+\alpha}\omega^+\frac{\partial}{\partial\Psi^\alpha} + \widetilde{\ }\ \text{conj.}.$$

- Gauge transformations can be generated using analytic differential operator, which generate auxiliary coordinate translations:

$$\hat{\Lambda} = \lambda^\alpha\frac{\partial}{\partial\Psi^\alpha} + \lambda^+\frac{\partial}{\partial\omega^+} + \widetilde{\ }\ \text{conj.}$$

  Then in full analogy with $\mathcal{N}=2$ higher spins [Buchbinder, Ivanov, N.Z. 2022] :

$$\delta_\lambda\mathfrak{D}^{++}_{gravitino} = [\mathcal{D}^{++}, \hat{\Lambda}] = \mathcal{D}^{++}\lambda^\alpha\frac{\partial}{\partial\Psi^\alpha} + \mathcal{D}^{++}\lambda^+\frac{\partial}{\partial\omega^+} + 2\theta^{+\alpha}\lambda^+\frac{\partial}{\partial\Psi^\alpha}.$$

- Rigid $\mathcal{N}=2$ supersymmetry transformations can be obtained if we require supersymmetry transformation laws for auxiliary coordinates:

$$\delta_\epsilon\Psi^\alpha = -2\epsilon^{-\alpha}\omega^+, \qquad \delta_\epsilon\omega^+ = 0$$

  and require supersymmetry invariance of harmonic derivative:

$$\delta_\epsilon\mathfrak{D}^{++}_{gravitino} = 0.$$

- These additional coordinates can be interpreted as *supertwistors* [Ferber 1977].

Outlook

- Conformal compensators and non-conformal half-integer $\mathcal{N} = 2$ higher spins
- Massive $\mathcal{N} = 4$ vector multiplet in the harmonic superspace and higher-spin supercurrents
- $\mathcal{N} = 2$ AdS supermultiplets in harmonic superspace (talk by E. Ivanov)
- Massive $\mathcal{N} = 2$ higher spins (Stueckelberg mechanism)

Thank you for your attention!