Плазмон-поляритоны на уединенном волновом пакете электрона

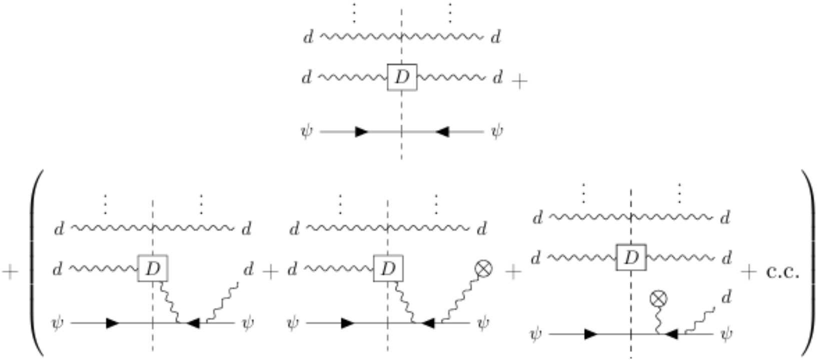
Акимов И.М.[1], Казинский П.О., Соколов А.А.

Томский государственный университет
Электронная почта: 1 - ima8908@mail.ru

Россия, г.Москва, Институт ядерных исследований РАН.
Сессия-конференция «Физика фундаментальных взаимодействий», 17-21 февраля 2025 г.

Основано на работе arXiv:2412.00750 (принята к публикации в Phys.Rev.D).
Доклад выполнен при поддержке гранта Правительства Российской Федерации (Соглашение № 075-15-2024-667 от 23.08.2024 г.)

Введение



Диаграммы, описывающие вклад в инклюзивную вероятность регистрации фотона в процессе вынужденного излучения от одного электрона во внешнем электромагнитном поле.

V. A. Bednyakov, D. V. Naumov, Phys. Part. Nucl. **52**, 39 (2021).
P.O. Kazinski, T.V. Solovyev, Eur. Phys. J. C **82**, 790 (2022).

Краткая аннотация работы

1. В данной работе методами *in-in* теории возмущений получен поляризационный оператор фотона в присутствии волнового пакета одного электрона.
2. В работе получены явные решения эффективного уравнения Максвелла, когда характерные размеры волнового пакета электрона много больше длины волны внешнего поля.
3. Показано, что в инфракрасном пределе дополнительные степени свободы сводятся к динамическому дипольному моменту электрона.

Используемые обозначения

В представлении взаимодействия состояние электрона в момент времени $t = 0$ задаётся в виде

$$|\overline{in}\rangle = \sqrt{\frac{V}{(2\pi)^3}} \sum_s \int d\mathbf{p} \varphi_s(\mathbf{p}) \hat{a}_s^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle. \tag{1}$$

Условие нормировки имеет вид

$$\sum_s \int d\mathbf{p} |\varphi_s(\mathbf{p})|^2 = 1. \tag{2}$$

В $in - in$ теории возмущения, с использованием представления Швингера, вершина взаимодействия имеет вид

$$S_{int} = -e \sum_{a=\pm} a \int d^4x \bar{\psi}^a \gamma^\mu A_\mu^a \psi^a. \tag{3}$$

J. Schwinger, J. Math. Phys. **2**, 407 (1961).

Поляризационный оператор

Поляризационный оператор определяется стандартным образом

$$\Pi^{ab}_{\mu\nu}(x,y) := \frac{\delta^2\bar{\Gamma}[A_a,\bar{\psi}_a,\psi_a]}{\delta A^\mu_a(x)\delta A^\nu_b(y)}\Big|_{A^\mu_a(x)=0,\psi_a(x)=\bar{\psi}_a(x)=0}, \qquad (4)$$

где $\bar{\Gamma}[A_a,\bar{\psi}_a,\psi_a]$ обозначает квантовые поправки к эффективному действию в *in-in* теории возмущения.

Поляризационный оператор представим в виде

$$\Pi^{\mu\nu}_{ab}(x,y) = \overset{0}{\Pi}{}^{\mu\nu}_{ab}(x,y) + \overset{\psi}{\Pi}{}^{\mu\nu}_{ab}(x,y), \qquad (5)$$

где $\overset{0}{\Pi}{}^{\mu\nu}_{ab}$ - независимая от формы волнового пакета часть поляризационного оператора. Далее такие слагаемые мы будем называть “вакуумными”.

Поляризационный оператор

Переход от представления Швинегра к представлению Келдыша осуществляется с помощью преобразования

$$A^{\pm}_{\mu} = A^{c}_{\mu} \pm \frac{1}{2} A^{q}_{\mu}. \tag{6}$$

В представлении Келдыша вакуумный поляризационный оператор, зависящий от импульса, после перенормировки будет иметь стандартный вид

$$\begin{gathered} \overset{0}{\Pi}{}^{\mu\nu}_{qc}(k) = (k^2\eta^{\mu\nu} - k^{\mu}k^{\nu})\overset{0}{\Pi}(k^2_+), \\ \overset{0}{\Pi}{}^{\mu\nu}_{qq}(k) = -\frac{4i\alpha}{3}\sqrt{1-\frac{4m^2}{k^2}}(1+\frac{2m^2}{k^2})\theta(k^2-4m^2)\times \\ \times(k^2\eta^{\mu\nu} - k^{\mu}k^{\nu}), \\ \text{где } \overset{0}{\Pi}(k^2) = \frac{2\alpha}{\pi}\int_0^1 dxx(1-x)\ln(1-x(1-x)\frac{k^2}{m^2}) \end{gathered} \tag{7}$$

L. V. Keldysh,Zh. Eksp. Teor. Fiz. **47**, 1515 (1964) [Sov. Phys. JETP **20**, 1018 (1965)].
M. E. Peskin, D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory* (Addison-Wesley, Reading, 1995).

Поляризационный оператор

В представлении Келдыша часть поляризационного оператора, зависящая от волнового пакета, будет иметь вид

$$\overset{\psi}{\Pi}{}^{\mu\nu}_{qc}(x,y) = -e^2\bar{\psi}(x)\gamma^\mu S_-(x,y)\gamma^\nu\psi(y) \\ - e^2\bar{\psi}(y)\gamma^\nu S_+(y,x)\gamma^\mu\psi(x), \tag{8}$$

где

$$\psi(x) = \langle 0|\hat{\psi}(x)|\overline{in}\rangle = \sum_s \int d\mathbf{p}\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3 p_0}}u_s(\mathbf{p})\varphi_s(\mathbf{p})e^{-ip_\mu x^\mu}. \tag{9}$$

Для описания смешанных состояний удобно будет ввести релятивистскую матрицу плотности

$$\psi(x)\bar{\psi}(y) \to \rho(x,y). \tag{10}$$

Эффективные уравнения Максвелла

Эффективные уравнения Максвелла в импульсном представлении будут иметь вид

$$
\begin{aligned}
-(1-\overset{0}{\Pi}(k_{+}^{\prime 2}))(k^{\prime 2}\eta^{\mu\nu}-k^{\prime\mu}k^{\prime\nu})A_{\nu}(k')+\\
+\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\overset{\psi}{\Pi}{}^{\mu\nu}_{qc}(k',k)A_{\nu}(k)=0.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

$$
\begin{aligned}
\overset{\psi}{\Pi}{}^{\mu\nu}_{qc}(k',k)=-2\pi e^2 m\sum_{s,s'}\int d\mathbf{p}_c d\mathbf{q}\delta(k'-k-q)\frac{\rho_{ss'}(\mathbf{p},\mathbf{p}')}{\sqrt{p_0 p_0'}}\times\\
\times\bar{u}_{s'}(\mathbf{p}')\Big[\frac{\gamma^{\mu}(\hat{p}_c+\hat{k}_c+m)\gamma^{\nu}}{(p^c+k_{+}^{c})^2-m^2}+\frac{\gamma^{\nu}(\hat{p}_c-\hat{k}_c+m)\gamma^{\mu}}{(p^c-k_{+}^{c})^2-m^2}\Big]u_s(\mathbf{p}),
\end{aligned}
\tag{12}
$$

где $q_{\mu}=k'_{\mu}-k_{\mu}=p_{\mu}-p'_{\mu}$, $p^c_{\mu}:=(p_{\mu}+p'_{\mu})/2$, и $k^c_{\mu}:=(k_{\mu}+k'_{\mu})/2$.

Коротковолновый предел

Для дальнейших рассуждений, нам будет удобно ввести вейлевский символ поляризационного оператора

$$\begin{aligned}\Pi(x_c, k_c) &= \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} e^{-iqx_c} \Pi(k_c + q/2, k_c - q/2) \\ &= \int d^4 z e^{ik_c z} \Pi(x_c + z/2, x_c - z/2).\end{aligned} \tag{13}$$

Пусть теперь масштаб изменения вейлевского символа велик.Также будем считать, что волновой пакет электрона достаточно узок в пространстве импульсов, т.е.

$$|\mathbf{q}| \ll p_0^c, \qquad |\mathbf{q}| \ll |\mathbf{p}_0^c|, \qquad |\mathbf{q}| \ll |k_0^c|, \qquad |\mathbf{q}| \ll |\mathbf{k}_c|. \tag{14}$$

Коротковолновый предел

В таком случае поляризационный оператор можно записать в виде

$$\overset{\psi}{\Pi}{}^{\mu\nu}_{qc}(x,k_c) = \frac{\omega_p^2(x)}{(k_c p_c)^2 - k_c^4/4}\Big[(k_c p_c)^2 \eta^{\mu\nu} - (k_c p_c) k_c^{(\mu} p_c^{\nu)} + \\ + k_c^2 p_c^\mu p_c^\nu - \frac{imk_c^2}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} k_\rho^c s_\sigma(x,\mathbf{p}_c)\Big], \qquad (15)$$

где s_μ - вектор спина электрона, $\omega_p^2(x) := e^2\rho(x)/m$.

D. B. Melrose, Rev. Mod. Plasma Phys. **4**, 8 (2020).
F. Haas, G. Manfredi, M. Feix, Phys. Rev. E **62**, 2763 (2000).

Плазмон-поляритонные решения

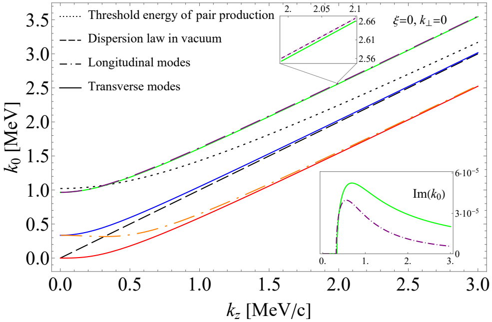
Будем решать уравнения в системе покоя электрона. Поляризационный оператор имеет особенность, когда

$$(kp)^2 - k^4/4 = m^2 k_0^2 - k^4/4 = 0. \tag{16}$$

Считаем, что плазменная частота и спин не зависят от координат. Тогда уравнение Максвелла записывается в пространстве импульсов в виде

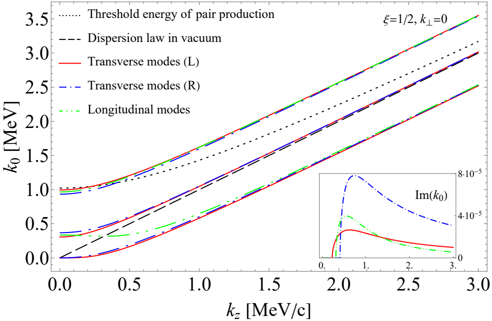
$$\begin{aligned}\Big\{ - k^2\eta^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu + \frac{\omega_p^2(k)}{(kp)^2 - k^4/4}\big[(kp)^2\eta^{\mu\nu} - (kp)k^{(\mu}p^{\nu)} + \\ + k^2 p^\mu p^\nu - \frac{imk^2}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}k_\rho s_\sigma\big]\Big\}A_\nu(k) = 0.\end{aligned} \tag{17}$$

Плазмон-поляритонные решения



На рисунке показаны законы дисперсии плазмон-поляритонных мод для одиночного неполяризованного электрона в системе покоя электрона. Также показаны закон дисперсии в вакууме и порог образования электрон-позитронной пары. Энергии плазмон-поляритонов, превышающие порог образования пары, обладают положительными мнимыми частями, представленными на вставке.

Плазмон-поляритонные решения



На данном рисунке то же, что и на первом, но для одного частично поляризованного электрона с степенью поляризации $\xi = 1/2$. В данном случае происходит расщепление мод, которые были в неполяризованном случае

Инфракрасный предел

Рассмотрим другой предел для поляризационного оператора. Будем считать, что длина волны внешнего поля много больше характерных размеров волнового пакета электрона в координатном и импульсном пространстве.

$$|k^\mu| \ll |p^\mu|, \qquad |q^\mu| \ll |p^\mu|, \tag{18}$$

и

$$\rho_{ss'}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \approx \rho_{ss'}(\mathbf{p}_c, \mathbf{p}_c) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{x}_0}. \tag{19}$$

В таком приближении в ведущем порядке поляризационный оператор имеет вид

$$\begin{aligned} \overset{\psi}{\Pi}{}^{\mu\nu}_{qc}(k, k') &\approx -\frac{1}{m}\Big[\eta^{\mu\nu} - \frac{k^\mu p_c^\nu}{(kp_c)} - \frac{p_c^\mu k'^\nu}{(k'p_c)} + \frac{(k'k)p_c^\mu p_c^\nu}{(k'p_c)(kp_c)}\Big] \\ &=: -\frac{1}{m}\pi^{\mu\nu}(k', k), \end{aligned} \tag{20}$$

Инфракрасный предел

Тогда эффективные уравнения Максвелла без источников принимают вид

$$(\Box\eta^{\mu\nu}-\partial^\mu\partial^\nu)A_\nu(x)+\frac{e^2}{m}\int d\tau\pi^{\mu\nu}\Big(i\frac{\partial}{\partial x},i\frac{\partial}{\partial x}\Big|_A\Big)\delta(x-x(\tau))A_\nu(x)=0. \quad (21)$$

Несложно проверить, что действие

$$\begin{aligned}S[A_\mu(x),d_\mu(\tau)] &:= -\frac{1}{4}\int d^4xF_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x)+\\ &+\int d\tau\Big[-\frac{1}{8\pi r_0}\dot{d}^\mu_\perp\eta_{\mu\nu}\dot{d}^\nu_\perp+\dot{x}^\mu F_{\mu\nu}(x(\tau))d^\nu\Big],\end{aligned} \quad (22)$$

где $r_0 := \alpha/m$ - классический радиус электрона, d^μ - динамический дипольный момент, $d^\mu_\perp := d^\mu-(\dot{x}d)\dot{x}^\mu$, $p^\mu_c = m\dot{x}^\mu$, и τ - натуральный параметр на мировой линии электрона, воспроизводит эффективные уравнения после исключения d^μ.

Выводы

В работе показано, что в когерентных процессах волновой пакет одного электрона несет на себе дополнительные степени свободы – плазмоны. В инфракрасном пределе эти дополнительный степени свободы сводятся к вектору дипольного момента.

Подробнее смотри в работе arXiv:2412.00750.