

# Об асимптотически безопасных четырехмерных калибровочных теориях с дополнительными операторами размерности-4 (по мотивам 2502.xxxxx)

Альфия Мухаева



Объединенный институт ядерных исследований,  
Лаборатория теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова

Сессия-конференция секции ядерной физики ОФН РАН, посвященная 70-летию В. А. Рубакова

Москва, 18.02.2025

## Калибровочно-юкавские теории

$$L = -\frac{1}{2}F^2 + i\bar{Q}\gamma_\mu D^\mu Q + y(\bar{Q}_L H Q_R + h.c.) \quad \text{Yukawa}$$

$$+ \text{Tr}[DH^\dagger DH] - \lambda_u \text{Tr}[(H^\dagger H)^2] - \lambda_v \text{Tr}[H^\dagger H]^2$$

Gauge

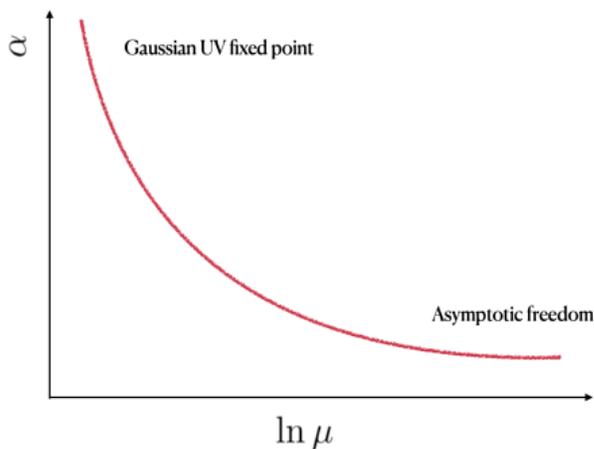
Scalar self-interactions

- ★ 4D: Стандартная модель, темная материя, ...
- ★ 3D: Конденсированные среды, фазовые переходы, ...
- ★ 2D: Графен, ...
- ★ 4plusD: Теория струн, ...

# Асимптотическая свобода vs Асимптотическая безопасность

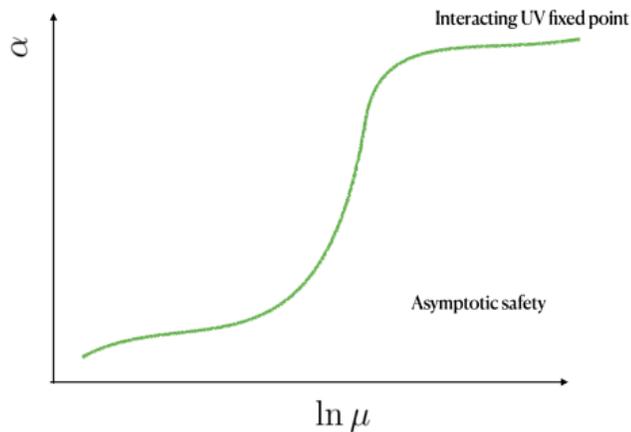
## ■ Асимптотическая свобода [Gross, Wilczek, Politzer'71]

- ★ Невзаимодействующая в УФ
- ★ Логарифмический



## ■ Асимптотическая безопасность [Weinberg'80]

- ★ Взаимодействующая в УФ
- ★ Степенной



# Ренормгрупповое уравнение

- Бег констант связи  $\lambda_i$  в КТП - описывается уравнением ренормгруппы (РГ)

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial \log \mu} = \beta_i(\{\lambda\})$$

- $\beta$ -функции вычисляются в теории возмущений как разложение по константам связи

$$\beta_\lambda = c_1 \lambda^2 + c_2 \lambda^3 + \dots$$

- $\beta_i$ -функции определяются в конкретной теории исходя из имеющихся симметрий и полей
- Существуют различные методы вычисления  $\beta_i$ -функций

## Фиксированные точки

- Фиксированные точки  $\lambda_i^*$  – точки в пространстве констант связи, удовлетворяющие

$$\beta_i(\{\lambda\}) = 0$$

- Инфракрасные точки удовлетворяют  $\lim_{\mu \rightarrow 0^+} \lambda(\mu) = \lambda^*$
- Ультрафиолетовые точки удовлетворяют  $\lim_{\mu \rightarrow \infty} \lambda(\mu) = \lambda^*$
- УФ точки позволяют определить КТП вплоть до больших энергий

# Ультрафиолетовые фиксированные точки в теории возмущений

- Возможные сценарии для фиксированных точек:
  - ★ Гауссовы фиксированные точки  $\lambda^* = 0$  – асимптотическая свобода
  - ★ Взаимодействующие ультрафиолетовые точки  $\lambda^* \neq 0$  – асимптотическая безопасность
- По теории возмущений
  - ★ Для асимптотической безопасности  $0 < |\lambda^*| \ll 1$
- Какие существуют необходимые условия для реализации асимптотической безопасности?
  - ★ Юкавские константы связи обеспечивают появление взаимодействующей УФ точки в калибровочных теориях
  - ★ Скалярные константы связи обеспечивают независимые условия согласованности таких теорий

$$\lambda^* = \text{real}, \quad V_{\text{eff}}(\phi) = \text{stable}$$

# Описание модели

- $SU(N_c)$  калибровочная группа
- $SU_L(N_f) \times SU_R(N_f)$  глобальная симметрия
- Лагранжиан ( $d = 4$ )

Field	$SU(N_c)$	$U_L(N_f)$	$U_R(N_f)$
$\psi_L$	$N_c$	$N_f$	1
$\psi_R$	$N_c$	1	$N_f$
$H$	1	$N_f$	$N_f$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} F^{a\mu\nu} F_{\mu\nu}^a + \mathcal{L}_{gf} + \mathcal{L}_{gh} \quad [F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c] \\
 & + \text{Tr}(\bar{\psi} i \hat{D} \psi) + \text{Tr}(\partial^\mu H^\dagger \partial_\mu H) - m^2 \text{Tr}(H^\dagger H) \\
 & - y_1 (\text{Tr}[\bar{\psi}_L H \psi_R] + \text{h.c.}) - y_2 (\text{Tr}[\bar{\psi}_L H^\dagger \psi_R] + \text{h.c.}) \\
 & - y_3 (\text{Tr}[\bar{\psi}_L \psi_R] \text{Tr}[H] + \text{h.c.}) - y_4 (\text{Tr}[\bar{\psi}_L \psi_R] \text{Tr}[H^\dagger] + \text{h.c.}) \\
 & - u \text{Tr}[H^\dagger H H^\dagger H] - v \text{Tr}[H^\dagger H] \text{Tr}[H^\dagger H] + \delta \mathcal{L}_4
 \end{aligned}$$

Также рассмотрим **операторы размерности-4**, нарушающие  $SU_L(N_f) \times SU_R(N_f) \rightarrow SU(N_f)$  симметрию

$$\delta\mathcal{L}_4 = -s_1 [\text{Tr}(HHHH) + \text{h.c.}] - s_2 [\text{Tr}(HHH^\dagger H^\dagger)] - s_3 [\text{Tr}(HHHH^\dagger) + \text{h.c.}] = -\vec{\kappa}_{single}^{(4)}$$

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_4 = & -d_1 [\text{Tr}(HH) \text{Tr}(H^\dagger H^\dagger)] - d_2 [\text{Tr}(HH) \text{Tr}(HH) + \text{h.c.}] \\ & - d_3 [\text{Tr}(HH) \text{Tr}(HH^\dagger) + \text{h.c.}] - d_4 [\text{Tr}(HHH) \text{Tr}(H) + \text{h.c.}] \\ & - d_5 [\text{Tr}(HHH) \text{Tr}(H^\dagger) + \text{h.c.}] - d_6 [\text{Tr}(HH^\dagger H) \text{Tr}(H) + \text{h.c.}] \\ & - d_7 [\text{Tr}(HH^\dagger H) \text{Tr}(H^\dagger) + \text{h.c.}] = -\vec{\kappa}_{double}^{(4)} \cdot \vec{O}^{(4)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_4 = & t_1 [\text{Tr}(HH) \text{Tr}(H) \text{Tr}(H) + \text{h.c.}] + t_2 [\text{Tr}(HH) \text{Tr}(H) \text{Tr}(H^\dagger) + \text{h.c.}] \\ & + t_3 [\text{Tr}(HH) \text{Tr}(H^\dagger) \text{Tr}(H^\dagger) + \text{h.c.}] + t_4 [\text{Tr}(H^\dagger H) \text{Tr}(H) \text{Tr}(H) + \text{h.c.}] \\ & + t_5 [\text{Tr}(H^\dagger H) \text{Tr}(H) \text{Tr}(H^\dagger) + \text{h.c.}] = -\vec{\kappa}_{triple}^{(4)} \cdot \vec{O}^{(4)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_4 = & q_1 [\text{Tr}(H) \text{Tr}(H) \text{Tr}(H) \text{Tr}(H) + \text{h.c.}] + q_2 [\text{Tr}(H) \text{Tr}(H) \text{Tr}(H) \text{Tr}(H^\dagger) + \text{h.c.}] \\ & + q_3 [\text{Tr}(H) \text{Tr}(H) \text{Tr}(H^\dagger) \text{Tr}(H^\dagger) + \text{h.c.}] = -\vec{\kappa}_{quadruple}^{(4)} \cdot \vec{O}^{(4)}. \end{aligned}$$

## Операторы размерности-3

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}_3 = & -m_\psi \text{Tr}(\bar{\psi}\psi) - \frac{h_2}{2} [\text{Tr}(HH^\dagger H) + \text{h.c.}] - \frac{h_3}{2} [\text{Tr}(HH^\dagger) \text{Tr}(H) + \text{h.c.}] \\
& - \frac{h_4}{2} [\text{Tr}(HHH) + \text{h.c.}] - \frac{h_5}{2} [\text{Tr}(HH) \text{Tr}(H) + \text{h.c.}] \\
& - \frac{h_6}{2} [\text{Tr}(HH) \text{Tr}(H^\dagger) + \text{h.c.}] - \frac{h_7}{2} [\text{Tr}(H) \text{Tr}(H) \text{Tr}(H) + \text{h.c.}] \\
& - \frac{h_8}{2} [\text{Tr}(H) \text{Tr}(H) \text{Tr}(H^\dagger) + \text{h.c.}] = -\vec{\kappa}^{(3)} \cdot \vec{O}^{(3)}
\end{aligned}$$

# Правила Фейнмана

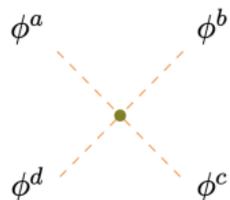
Способы вычисления  $\beta$ -функций в GY модели в теории возмущений:

- Переписать лагранжиан в терминах действительных скаляров, используя ( $a = 1, \dots, 2N_f^2$ )

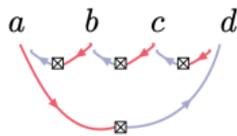
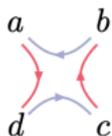
$$H = \phi^a T^a, \quad H^\dagger = \phi^a \bar{T}^a, \quad \bar{T}^a \equiv T^{a\dagger}, \quad \text{Tr}(T^a \bar{T}^b) + \text{Tr}(T^b \bar{T}^a) = \delta^{ab}$$

$$= -iy_1 T_{ij}^a \delta_{\alpha\beta}$$

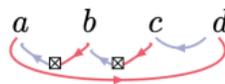
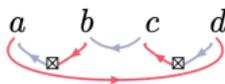
$$= -iy_2 \bar{T}_{ij}^a \delta_{\alpha\beta}$$

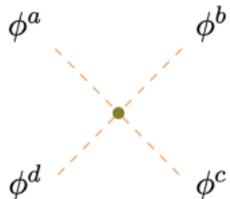


$$= -i2 \{ +u \cdot [\text{Tr}(T^a \bar{T}^b T^c \bar{T}^d) + \text{perms.}] + s_1 \cdot [\text{Tr}(T^a T^b T^c T^d) + \text{perms.}] \}$$

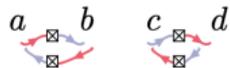
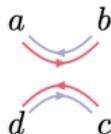


$$+ s_2 \cdot [\text{Tr}(T^a T^b \bar{T}^c \bar{T}^d) + \text{perms.}] + s_3 \cdot [\text{Tr}(T^a T^b T^c \bar{T}^d) + \text{perms.}] \}$$

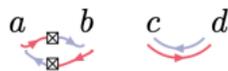
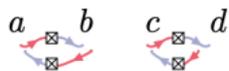




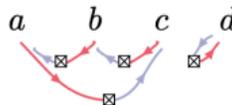
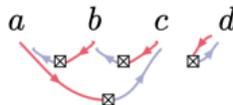
$$= -i2\{+v \cdot [\text{Tr}(T^a \bar{T}^b) \text{Tr}(T^c \bar{T}^d) + \text{perms.}] + d_1 \cdot [\text{Tr}(T^a T^b) \text{Tr}(\bar{T}^c \bar{T}^d) + \text{perms.}]\}$$



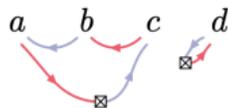
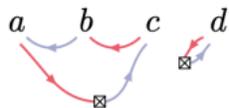
$$+ d_2 \cdot [\text{Tr}(T^a T^b) \text{Tr}(T^c T^d) + \text{perms.}] + d_3 \cdot [\text{Tr}(T^a T^b) \text{Tr}(T^c \bar{T}^d) + \text{perms.}]$$

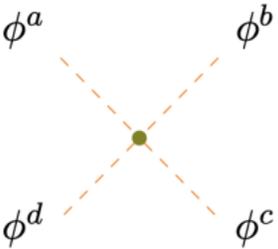


$$+ d_4 \cdot [\text{Tr}(T^a T^b T^c) \text{Tr}(T^d) + \text{perms.}] + d_5 \cdot [\text{Tr}(T^a T^b T^c) \text{Tr}(\bar{T}^d) + \text{perms.}]$$



$$+ d_6 \cdot [\text{Tr}(T^a \bar{T}^b T^c) \text{Tr}(T^d) + \text{perms.}] + d_7 \cdot [\text{Tr}(T^a \bar{T}^b T^c) \text{Tr}(\bar{T}^d) + \text{perms.}]\}$$





$$= -i2 \{ +t_1 \cdot \underbrace{[\text{Tr}(T^a T^b) \text{Tr}(T^c) \text{Tr}(T^d) + \text{perms.}]}$$


$$+ q_1 \cdot \underbrace{[\text{Tr}(T^a) \text{Tr}(T^b) \text{Tr}(T^c) \text{Tr}(T^d) + \text{perms.}]} \}$$


$$\begin{aligned}
 O_1 \otimes & \begin{array}{l} \psi_\alpha^i \\ \psi_\beta^j \end{array} = -i\delta_{\alpha\beta}\delta_{ij}(P_L + P_R) \Rightarrow \begin{array}{l} \psi_{\alpha,L}^i \\ \psi_{\beta,R}^j \end{array} + \begin{array}{l} \psi_{\alpha,R}^i \\ \psi_{\beta,L}^j \end{array}, \\
 O_2 \otimes & \begin{array}{l} \phi^a \\ \phi^b \\ \phi^c \end{array} = -\frac{i}{2} \cdot \{ \underbrace{[\text{Tr}(T^a \bar{T}^b T^c) + \text{perms.}] + \text{h.c.}}_{\begin{array}{c} a \quad b \quad c \\ \curvearrowright \quad \curvearrowleft \quad \curvearrowright \\ \square \end{array}} \}, \\
 O_3 \otimes & \begin{array}{l} \phi^a \\ \phi^b \\ \phi^c \end{array} = -\frac{i}{2} \cdot \{ \underbrace{[\text{Tr}(T^a \bar{T}^b) \text{Tr}(T^c) + \text{perms.}] + \text{h.c.}}_{\begin{array}{c} a \quad b \quad c \\ \curvearrowright \quad \curvearrowleft \quad \curvearrowright \\ \square \end{array}} \}, \\
 O_4 \otimes & \begin{array}{l} \phi^a \\ \phi^b \\ \phi^c \end{array} = -\frac{i}{2} \cdot \{ \underbrace{[\text{Tr}(T^a T^b T^c) + \text{perms.}] + \text{h.c.}}_{\begin{array}{c} a \quad b \quad c \\ \curvearrowright \quad \curvearrowright \quad \curvearrowright \\ \square \end{array}} \},
 \end{aligned}$$

$$O_5 \otimes \begin{matrix} \phi^a \\ \phi^b \\ \phi^c \end{matrix} = -\frac{i}{2} \cdot \{ \underbrace{[\text{Tr}(T^a T^b) \text{Tr}(T^c)]}_{\begin{matrix} a & b & c \\ \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \end{matrix}} + \text{perms.} \} + \text{h.c.} \}$$

$$O_6 \otimes \begin{matrix} \phi^a \\ \phi^b \\ \phi^c \end{matrix} = -\frac{i}{2} \cdot \{ \underbrace{[\text{Tr}(T^a T^b) \text{Tr}(\bar{T}^c)]}_{\begin{matrix} a & b & c \\ \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \end{matrix}} + \text{perms.} \} + \text{h.c.} \}$$

$$O_7 \otimes \begin{matrix} \phi^a \\ \phi^b \\ \phi^c \end{matrix} = -\frac{i}{2} \cdot \{ \underbrace{[\text{Tr}(T^a) \text{Tr}(T^b) \text{Tr}(T^c)]}_{\begin{matrix} a & b & c \\ \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \end{matrix}} + \text{perms.} \} + \text{h.c.} \}$$

$$O_8 \otimes \begin{matrix} \phi^a \\ \phi^b \\ \phi^c \end{matrix} = -\frac{i}{2} \cdot \{ \underbrace{[\text{Tr}(T^a) \text{Tr}(T^b) \text{Tr}(\bar{T}^c)]}_{\begin{matrix} a & b & c \\ \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \end{matrix}} + \text{perms.} \} + \text{h.c.} \}$$

# Предел Венециано

- Предел Венециано:  $N_{f,c} \rightarrow \infty$ ,  $N_f/N_c = \text{const}$
- 't Hooft-like константы связи:

$$\alpha_g = \frac{g^2 N_c}{16\pi^2}, \quad \alpha_{y_{1,2}} = \frac{y_{1,2}^2 N_c}{16\pi^2}, \quad \alpha_u = \frac{u N_f}{16\pi^2}, \quad \alpha_v = \frac{v N_f^2}{16\pi^2}.$$

$$\alpha_{s_i} = \frac{s_i N_f}{(4\pi^2)}, \quad \alpha_{d_i} = \frac{d_i N_f^2}{(4\pi^2)}, \quad \alpha_{t_i} = \frac{t_i N_f^3}{(4\pi^2)}, \quad \alpha_{q_i} = \frac{q_i N_f^4}{(4\pi^2)}$$

$$m'_\psi = m_\psi \sqrt{N_c}, \quad \alpha_{h_2} = h_2 N_f, \quad \alpha_{h_3} = h_3 N_f^2, \quad \alpha_{h_4} = h_4 N_f,$$

$$\alpha_{h_5} = h_5 N_f^2, \quad \alpha_{h_6} = h_6 N_f^2, \quad \alpha_{h_7} = h_7 N_f^3, \quad \alpha_{h_8} = h_8 N_f^3$$

- Малый параметр разложения  $-\frac{11}{2} < \epsilon < \infty$  и  $|\epsilon| \ll 1$
- 1-петлевая калибровочная бета-функция  $\partial_t \alpha_g = \alpha_g^2 \left[ \frac{4}{3} \epsilon + \dots \right]$

# Предел Венециано

- Для  $\beta_i(N_c \rightarrow \infty)$  вычислить фиксированные точки как разложение по  $\epsilon$ :

$$\alpha_x^* = \sum_{i=1}^{\infty} c_x^{(i)} \epsilon^i, \quad \text{perturbative control!}$$

- Для нахождения  $c_x^{(n)}$  необходимо рассмотреть

$(n+1)$  loop  $\beta_g$  gauge

$n$  loop  $\beta_y$  Yukawa

$n$  loop  $\beta_{u,v,s_i,d_i,t_i,q_i}$  scalar

Современные результаты: в 433 - порядке

$$\alpha_x^* = c_x^{(1)} f_x^{(1)} \epsilon + c_x^{(2)} f_x^{(2)} \epsilon^2 + c_x^{(3)} f_x^{(3)} \epsilon^3,$$

211

322

433

Litim

Litim et al'17

Litim et al'23

Sannino'14

Litim et al'21

Bednyakov, AM'24

## УФ фиксированные точки &amp; Критические экспоненты

- В пределе Венециано, можно вычислить фиксированные точки, например, в 211 порядке

$$\alpha_g^* = \frac{26}{57}\epsilon,$$

$$\alpha_{y_{1,2}}^* = \frac{4}{19}\epsilon,$$

$$\alpha_u^* = \frac{1}{19}(\sqrt{23} - 1)\epsilon,$$

$$-\alpha_v^* = \frac{1}{19}\left(\sqrt{20 + 6\sqrt{23}} - 2\sqrt{23}\right)\epsilon,$$

$$\alpha_{s_i, d_i, t_i, q_i}^* = 0$$

- Для  $\alpha^* = \alpha^*(\epsilon)$ , получим

$$\theta_g(\alpha^*) < 0 < \theta_{i, i \neq g}(\alpha^*)$$

одно IR-relevant направление

$$\theta_1 = -\frac{104\epsilon^2}{171} + \frac{2296\epsilon^3}{3249},$$

$$\theta_2 = \frac{52\epsilon}{19}, \quad \theta_3 = \frac{8\epsilon}{19},$$

$$\theta_4 = \frac{8}{19}\sqrt{2(10 + 3\sqrt{23})}\epsilon, \quad \theta_5 = \frac{16\sqrt{23}\epsilon}{19},$$

$$\theta_6 = \frac{16\epsilon}{19},$$

$$\theta_7 = \frac{8}{19}(1 + \sqrt{23})\epsilon,$$

$$\theta_8 = \frac{4}{19}\left(2 + \sqrt{2(10 + 3\sqrt{23})}\right)\epsilon.$$

Аномальные размерности  $\dim=3$  операторов

$$\frac{d}{d \ln \mu} \vec{\kappa} \equiv \dot{\vec{\kappa}} = \vec{\beta}_{\kappa} = \gamma_{\kappa}(\alpha) \cdot \vec{\kappa}$$

$$\gamma_1 = \frac{4}{19} \epsilon + \frac{14567}{6859} - \frac{2376\sqrt{23}}{6859} \epsilon^2,$$

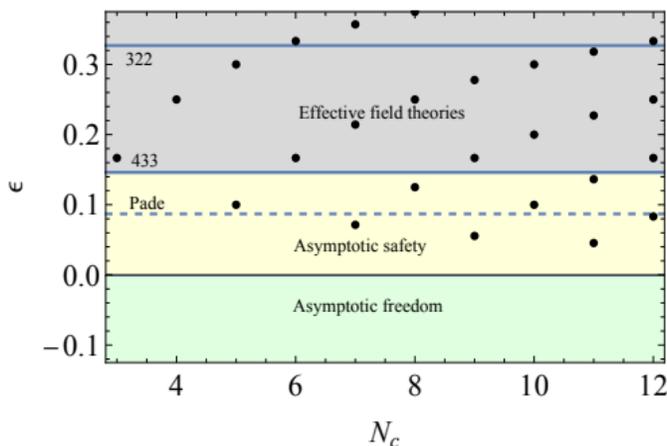
$$\gamma_2 = \frac{4}{19} \left(1 + 2\sqrt{23}\right) \epsilon + \frac{606162}{6859\sqrt{23}} - \frac{99745}{6859} \epsilon^2,$$

$$\gamma_3 = \frac{4}{19} \left(1 + \sqrt{20 + 6\sqrt{23}}\right) \epsilon + \left( \frac{14567}{6859} - \frac{2376\sqrt{23}}{6859} + \frac{\sqrt{2(1475668498887\sqrt{23} - 7061359720318)}}{6859\sqrt{2461}} \right) \epsilon^2,$$

$$\gamma_4 = \frac{12}{19} \epsilon + \frac{(5543672944446837727632 - 904219600192605645696\sqrt{23})}{870095712362665842288} \epsilon^2.$$

# Конформное окно

- ограничения на константу связи  $0 < |\alpha^*| \lesssim 1$
- условие стабильности вакуума  $\alpha_u^* > 0$  и  $\alpha_u^* + \alpha_v^* > 0$
- слияние фиксированных точек (столкновение UV и IR фиксированных точек  $\Leftrightarrow \theta = 0$ )



Пары  $(N_c, N_f)$ , соответствующие асимптотически безопасным КТП:

$$(N_c, N_f) = (5, 28), (7, 39), (8, 45), (9, 50), (10, 56), (11, 61), (11, 62), (12, 67) \dots$$

## Результаты и Планы

- Вычислены все  $\beta_x$  до 433-порядка
- Вычислены  $\alpha^*$  и  $\theta_i$  до  $O(\epsilon^3)$
- Вычислены аномальные размерности для полей и операторов размерности-3
- Найдены области конформного окна
  - ★ Непертурбативные вычисления
  - ★ Поправки к эффективному потенциалу [Steudtner'24]
  - ★ Что насчет 544?

Спасибо за внимание!