Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

Универсальный метод задания массивных релятивистских кварк-глюонных струн со свободными концами

Николаенко Р. В.

rvnikolaenko@mephi.ru

Сессия-конференция «Физика фундаментальных взаимодействий» ОФН РАН,
70-летию со дня рождения академика РАН Валерия Анатольевича Рубакова
Москва, февраль 2025

Введение. Струнная модель адронизации

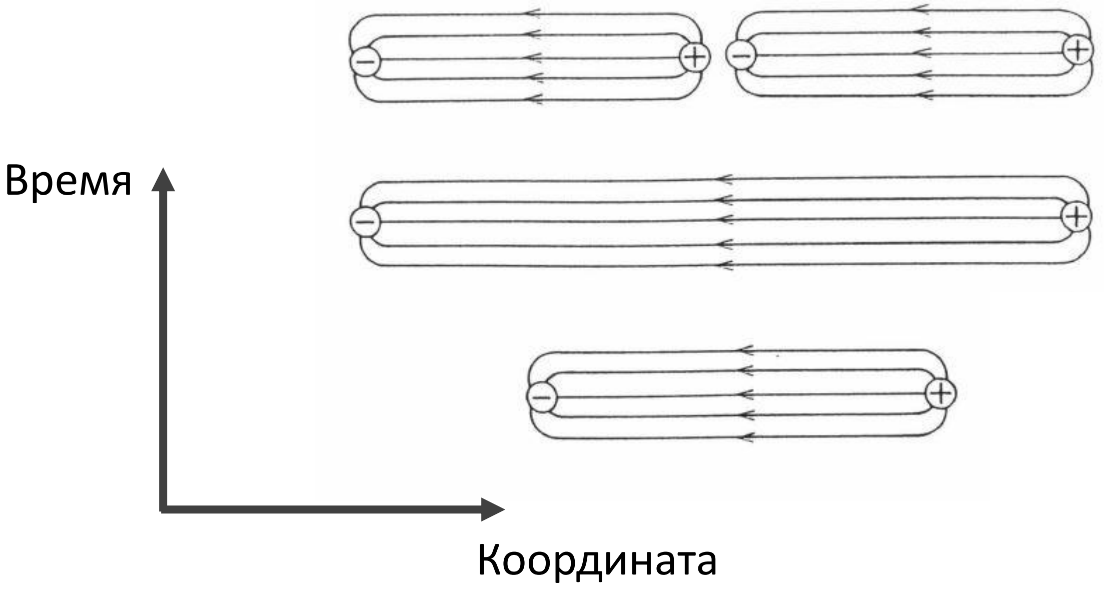
- **Преконфайнмент:** на раннем этапе после образования партоны объединяются в бесцветные системы
- КХД-поле между партонами образует трубку («flux tube») из-за давления внешнего поля глюонов

Силовые линии поля между кварком и антикварком сжимаются в трубку

- Чтобы упростить расчет пренебрегают поперечным размером трубки

  → **Струны**

- Струны **фрагментируют** путем образования пары кварк-антикварк или дикварк-антидикварк (механизм Швингера)

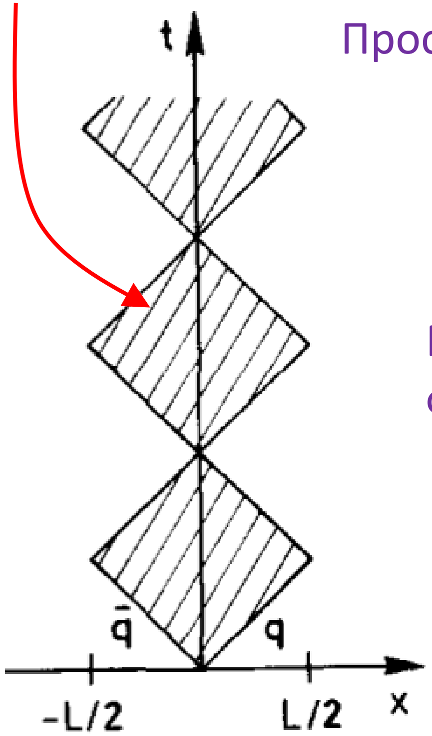


- Легкие струны ассоциируются с **адронами**
- Рождение мезонов: $q - \bar{q}$ струна
- Рождение барионов (антибарионов): $q - qq$ $(\bar{q} - \overline{qq})$ струна

Проблема учета массы и углового момента струны

Модель **Lund**

Мировой лист струны, площадь A



Простейшее уравнение движения (УД):

$$\left|\frac{dE}{dx}\right| = \left|\frac{dp_x}{dx}\right| = \left|\frac{dE}{dt}\right| = \left|\frac{dp_x}{dt}\right| = \kappa.$$

Результат – универсальные функции фрагментации:

$$f(z) \propto \frac{(1-z)^a}{z} e^{-\frac{bm^2}{z}}.$$

- **Два кварка разлетаются из одной точки – нет вращения.**
- **Корректно ли использовать эти УД для массивных струн?**

Caltech-II (EPOS, NEXUS)

УД релятивистской струны Намбу-Гото:

$$\ddot{x}_\mu - x''_\mu = 0.$$

Параметрическая формула для координат струны:

$$x_\mu(\tau,\sigma) = \frac{1}{2}\left(\rho_\mu(\sigma-\tau) + \rho_\mu(\sigma+\tau) + \int_{\sigma-\tau}^{\sigma+\tau} v_\mu(\lambda)\, d\lambda\right).$$

Описание фрагментации – закон площади Артру-Меннесье:

$$dP/dA \equiv P_0 = const.$$

Но! Начальные условия задают **безмассовую** струну (D.A. Morris):

$$\rho_\mu \equiv 0, \qquad v_\mu = const = E/p.$$

- Струна представляется точкой – нет вращения!

Ограничения на движение струны: условия Вирасоро

Подставим решение задачи о движении струны в условия ортонормальной калибровки (ОНК):

$$x_\mu(\tau,\sigma) = Q_\mu + P_\mu \frac{\tau}{\pi\kappa} + \frac{i}{\sqrt{\pi\kappa}} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} e^{-in\tau} \frac{\alpha_{n\mu}}{n} \cos(n\sigma) \qquad \begin{cases} \dot{x}^2 + x'^2 = 0 \\ \dot{x}x' = 0. \end{cases}$$

В результате получаем **условия Вирасоро**:

$$\Rightarrow \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\alpha_{n-m}\,\alpha_m = 0}, \qquad \boldsymbol{n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots}$$

Здесь $\alpha_{n\mu}$ - фурье-амплитуды, они определяются следующим образом:

$$\alpha_{n\mu} = \sqrt{\frac{\kappa}{\pi}} \int_0^\pi d\sigma \cos(n\sigma) \Big(v_\mu(\sigma) - in\rho_\mu(\sigma) \Big), \qquad n \neq 0, \qquad \alpha_{0\mu} = \frac{P_\mu}{\sqrt{\kappa\pi}}.$$

Функции $\boldsymbol{v_\mu(\sigma)}$ и $\boldsymbol{\rho_\mu(\sigma)}$ задают скорость и координаты струны в начальный момент времени.

- **Таким образом, условия Вирасоро накладывают ограничения на функции начальных данных струны**.

FOEE метод задания начальных условий для массивной струны

Проблема:

Можно показать, что для удовлетворения условий Вирасоро в случае **ненулевой** массы струны не подходят полиномы, дробно-рациональные выражения, функции, содержащие синус и степенные ряды

Предлагается новый способ:

- Представим функции начальных данных в виде *конечных* рядов по собственным функциям вспомогательной задачи Штурма-Лиувилля (**F**inal-**O**rder **E**igenfunction **E**xpansion, **FOEE**):

$$v_\mu(\sigma) = a_{0\mu} u_0(\sigma) + \sum_{k=1}^{N} a_{k\mu} u_k(\sigma)\,, \qquad \rho_\mu(\sigma) = b_{0\mu} u_0(\sigma) + \sum_{k=1}^{N} b_{k\mu} u_k(\sigma)\,.$$

- Для струны со свободными концами:

$$v_\mu(\sigma) = a_{0\mu} + \sum_{k=1}^{N} a_{k\mu} \cos(k\sigma)\,, \qquad \rho_\mu(\sigma) = b_{0\mu} + \sum_{k=1}^{N} b_{k\mu} \cos(k\sigma)\,.$$

Построение FOEE-системы

- Собственные функции задачи Ш.-Л. ортогональны, поэтому система получается **конечной:**

$$
\begin{cases}
\sum\limits_{\substack{m=\max(n-N,-N)\\ m\neq 0, m\neq n}}^{\min(n+N,N)} (a_{n-m}a_m - m(n-m)b_{n-m}b_m) + \frac{4}{\kappa\pi}Pa_n = 0\\
\sum\limits_{\substack{m=\max(n-N,-N)\\ m\neq 0, m\neq n}}^{\min(n+N,N)} (ma_{n-m}b_m + (n-m)a_m b_{n-m}) - \frac{4n}{\kappa\pi}Pb_n = 0,
\end{cases}
\quad n \neq 0, \quad
\begin{cases}
\sum\limits_{\substack{m=-N\\ m\neq 0}}^{N} (a_{-m}a_m + m^2 b_{-m}b_m) = -\frac{2P^2}{(\kappa\pi)^2}\\
\sum\limits_{\substack{m=-N\\ m\neq 0}}^{N} m(a_{-m}b_m - a_m b_{-m}) = 0.
\end{cases}
$$

- К этой системе добавим **законы сохранения**:

$$\kappa\int_0^\pi d\sigma\, v_\mu(\sigma) = \kappa\int_0^\pi d\sigma\, \dot{x}_\mu(0,\sigma) = P_\mu,$$

$$\kappa\int_0^\pi d\sigma\left[\rho_\mu(\sigma)v_\nu(\sigma) - \rho_\nu(\sigma)v_\mu(\sigma)\right] = \kappa\int_0^\pi d\sigma\left[x_\mu(0,\sigma)\dot{x}_\nu(0,\sigma) - x_\nu(0,\sigma)\dot{x}_\mu(0,\sigma)\right] = M_{\mu\nu}.$$

Система FOEE: 1 порядок

Начальные условия имеют вид:

$$v_\mu(\sigma) = a_\mu + b_\mu \cos(\sigma)$$
$$\rho_\mu(\sigma) = c_\mu + d_\mu \cos(\sigma)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_{0\mu} = \dfrac{P_\mu}{\sqrt{\kappa\pi}} \\ \alpha_{1\mu} = \dfrac{\sqrt{\kappa\pi}}{2}\left(b_\mu - i d_\mu\right) \\ \alpha_{-1\mu} = \dfrac{\sqrt{\kappa\pi}}{2}\left(b_\mu + i d_\mu\right) \end{cases}$$

Выражения для фурье-амплитуд

Система условий Вирасоро:

$$\begin{cases} b^2 - d^2 = 0 \\ bd = bP = dP = 0 \\ b^2 + \dfrac{2P^2}{(\kappa\pi)^2} = 0 \end{cases}$$

Сохранение 4-импульса: $a_\mu = \dfrac{P_\mu}{\kappa\pi}$

15 уравнений, 16 переменных

Сохранение углового момента: $c_\mu P_\nu - c_\nu P_\mu + \dfrac{\kappa\pi}{2}\left(d_\mu b_\nu - d_\nu b_\mu\right) = M_{\mu\nu}.$

- **Даже в первом порядке разрешить систему в общем случае сложно из-за ее нелинейности.**

FOEE(1)-струна в системе центра масс

- Зададим струну в системе ее центра масс:

$P_0 \equiv M, P_i = 0, i = 1, 2, 3.$

- Повернем систему координат так, чтобы вращение струны происходило лишь вокруг одной оси:

$$\mathcal{M}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{M}_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathcal{M}_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда функции начальных данных имеют следующий вид:

$$\boldsymbol{v_\mu^*(\sigma) = (\kappa\pi)^{-1} M\left[\delta_{0\mu} + \delta_{1\mu}\cos(\sigma)\right]}, \qquad \boldsymbol{\rho_\mu^*(\sigma) = -(\kappa\pi)^{-1}\xi M\delta_{3\mu}\cos(\sigma)},$$

где $\delta_{\mu\nu}$ – дельта-символ Кронекера, ξ – сигнатура вращения струны:

$$\boldsymbol{\xi = \mathrm{sign}\mathcal{M}_{13}}.$$

FOEE(1)-струна в системе центра масс

- Получаем формулу для координат струны:

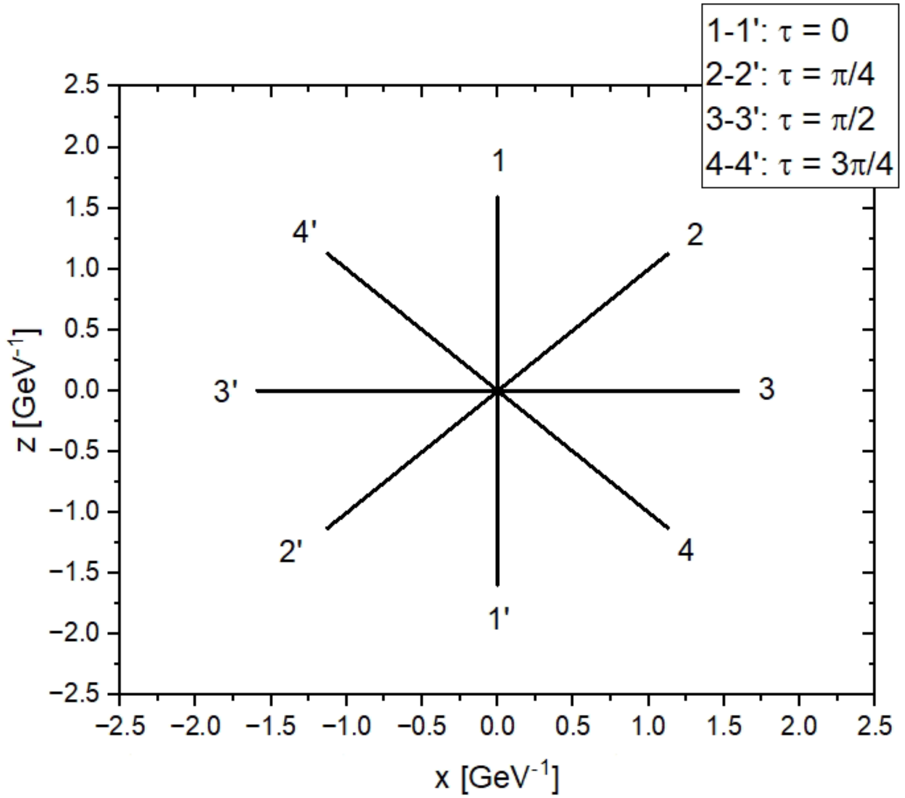
$$x_\mu(\tau,\sigma) = (\kappa\pi)^{-1}M\big(\delta_{0\mu}\tau + \left[\delta_{1\mu}\sin(\tau) - \xi\delta_{3\mu}\cos(\tau)\right]\cos(\sigma)\big).$$

- Выполняется важнейшее соотношение:

$$2\kappa\pi|\mathcal{M}_{13}| = M^2.$$

  - Для наличия массы струна ***обязана*** вращаться, то есть обладать спином!

- Важно: для FOEE(1)-струны выполняются условия на касательные векторы к мировой поверхности струны.



FOEE(1)-струна в СЦМ вращается как жесткий стержень

FOEE(1)-струна в произвольной системе

Лоренц-буст в систему, где полный импульс струны равен $\vec{P}$:

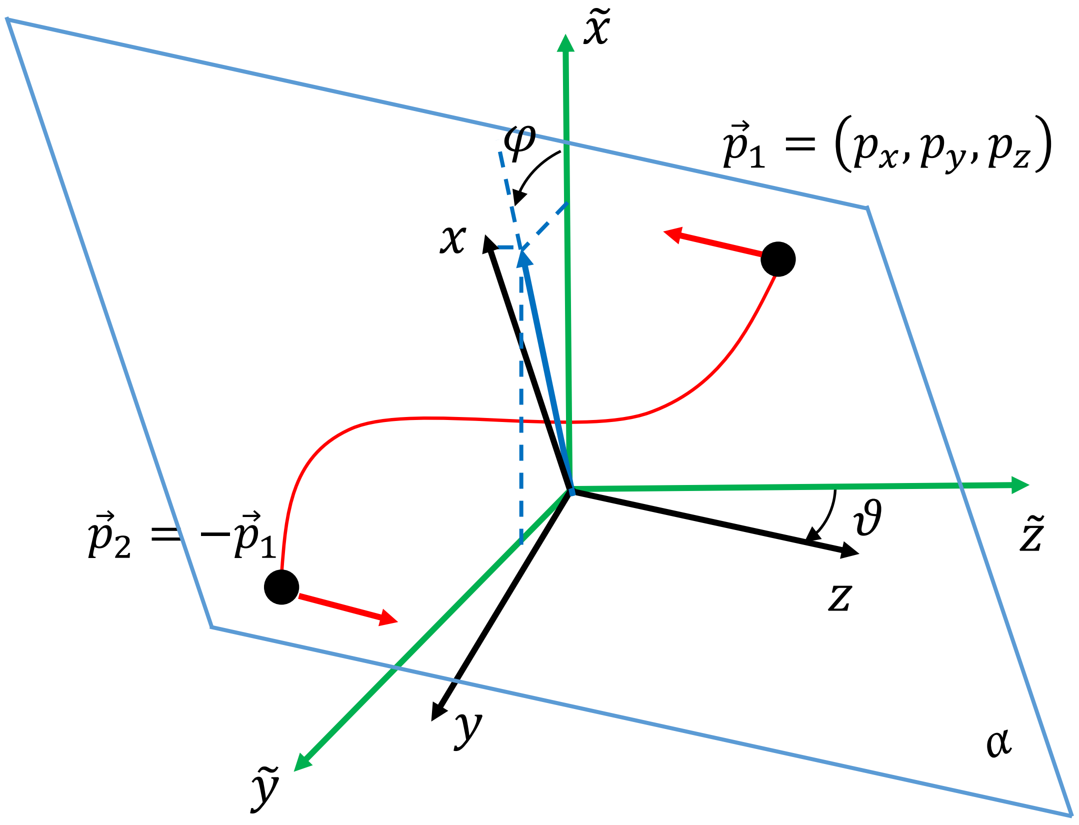
$$v_0(\sigma) = \frac{P_0 v_0^*(\sigma) + \vec{P}\vec{v}^*(\sigma)}{M},$$

$$\vec{v}(\sigma) = \vec{v}^*(\sigma) + \vec{P}\frac{v_0(\sigma) + v_0^*(\sigma)}{P_0 + M}.$$

Поворот осей координат:

$$R(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta & -\sin\varphi & \cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\cos\vartheta & \cos\varphi & \sin\varphi\sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & 0 & \cos\vartheta \end{pmatrix},$$

$$\cos\vartheta = \frac{p_z}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}}, \qquad \cos\varphi = \frac{p_y}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}.$$



Поворот осей координат в системе центра масс струны

FOEE(1)-струна в произвольной системе

Начальные данные задачи Коши о движении струны:

$$\boldsymbol{v_\mu(\sigma) = (\kappa\pi)^{-1}\big[P_\mu + \big(M\psi_\mu - (P\psi)\chi_\mu\big)\cos(\sigma)\big]}, \qquad \boldsymbol{\rho_\mu(\sigma) = -\xi(\kappa\pi)^{-1}\big(M\lambda_\mu - (P\lambda)\chi_\mu\big)\cos(\sigma)},$$

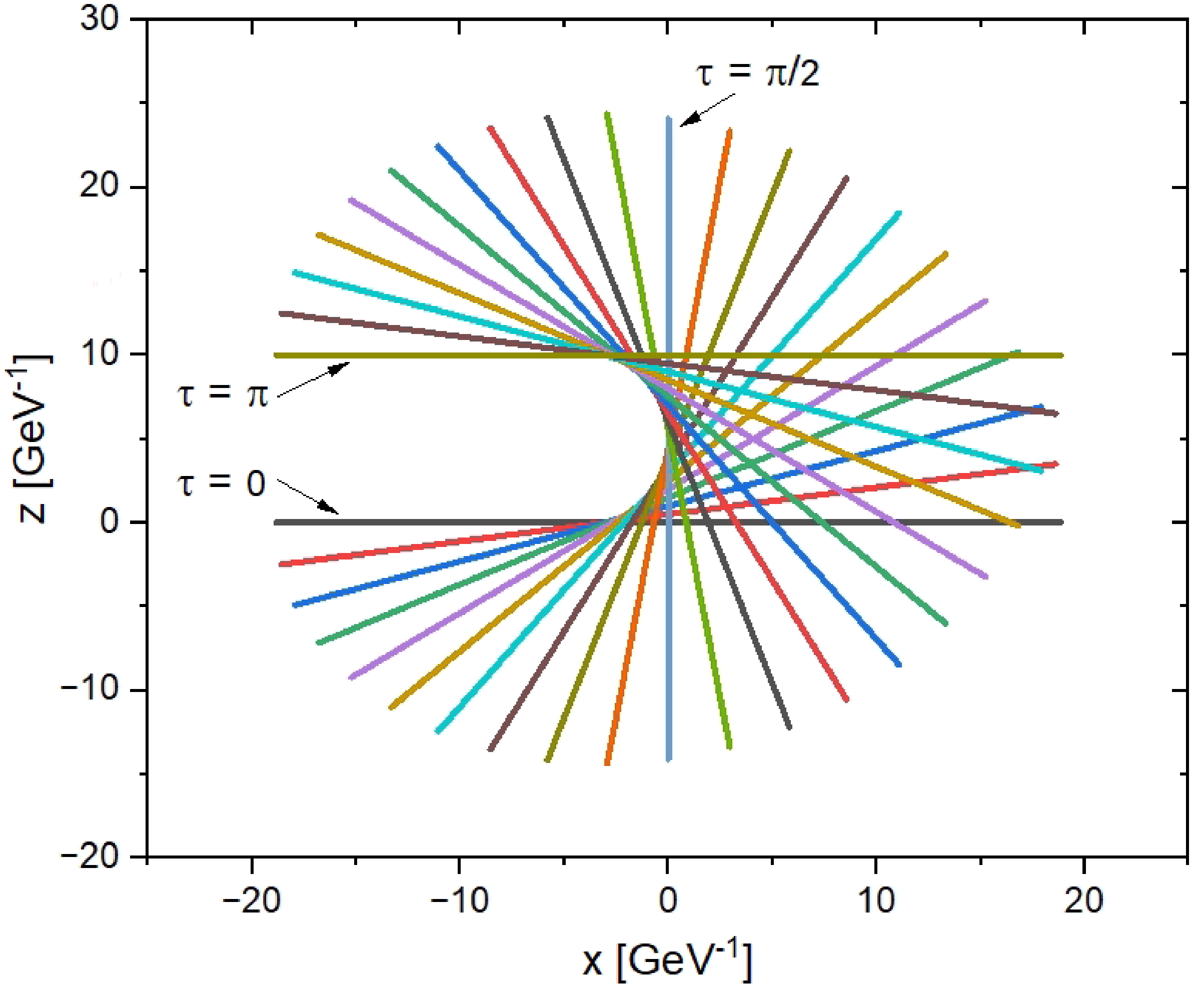
$$\psi_\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\varphi\cos\vartheta \\ \sin\varphi\cos\vartheta \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix}, \qquad \lambda_\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}, \qquad \chi_0 \equiv 1, \qquad \vec{\chi} = \frac{\vec{P}}{P_0 + M}.$$

Координаты струны определяются формулой:

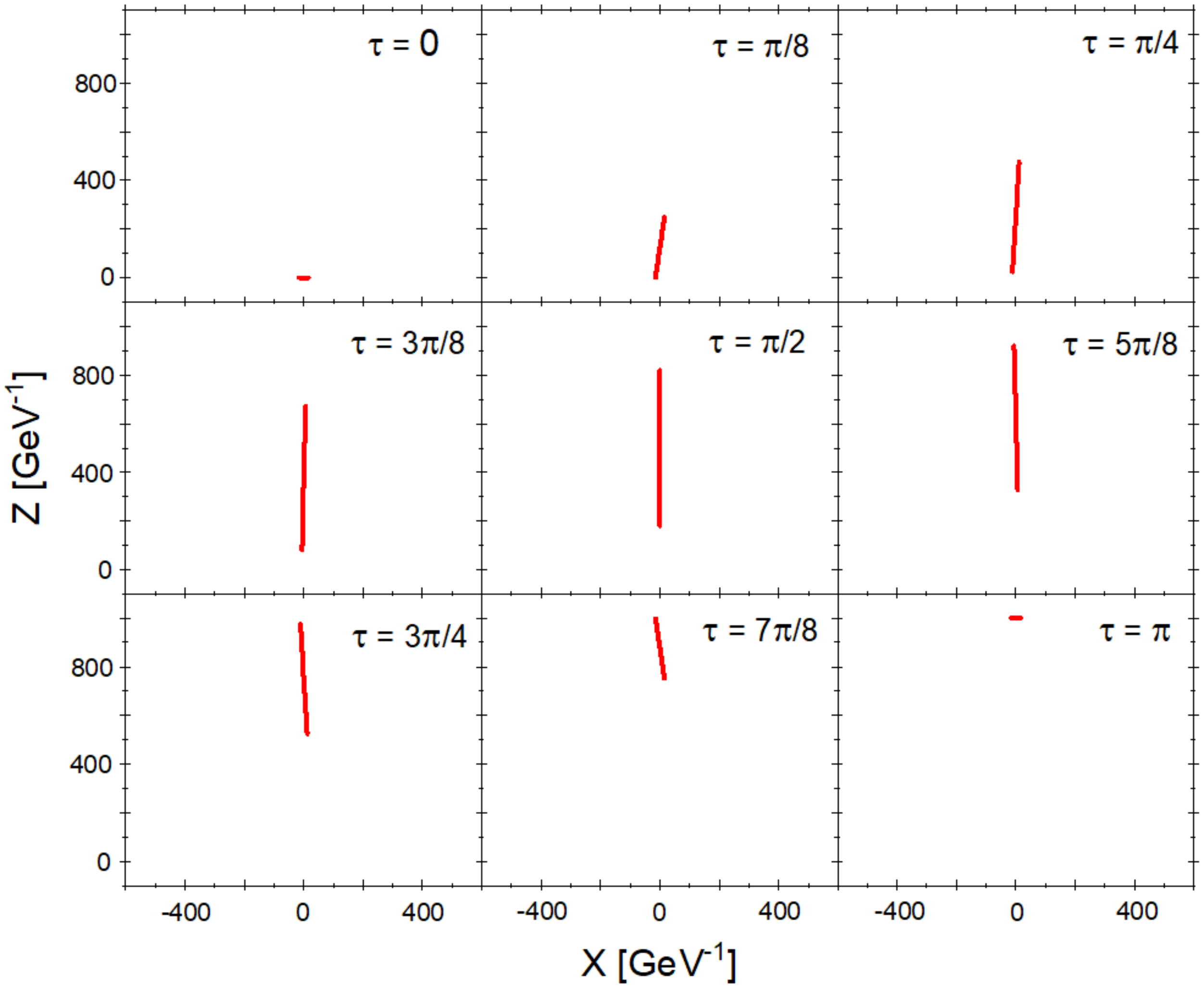
$$\boxed{\boldsymbol{x_\mu(\tau,\sigma) = (\kappa\pi)^{-1}\Big(P_\mu\tau + \big[\big(P\Omega(\tau)\big)\chi_\mu - M\Omega_\mu(\tau)\big]\cos(\sigma)\Big)}},$$

$$\Omega_\mu(\tau) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\varphi\sin(\xi\vartheta - \tau) \\ \sin\varphi\sin(\xi\vartheta - \tau) \\ \xi\cos(\xi\vartheta - \tau) \end{pmatrix}, \qquad \Lambda_\mu(\tau) = -\begin{pmatrix} 0 \\ \cos\varphi\cos(\xi\vartheta - \tau) \\ \sin\varphi\cos(\xi\vartheta - \tau) \\ -\xi\sin(\xi\vartheta - \tau) \end{pmatrix}.$$

Примеры движения FOEE(1)-струны



Движение FOEE(1)-струны с массой 12 ГэВ и импульсом $P_z = 2$ ГэВ



Движение FOEE(1)-струны с массой 10 ГэВ и импульсом $P_z = 200$ ГэВ

Обобщение на случай струны с собственной осцилляцией высшего порядка

- Для FOEE(1)-струн допускается наличие собственной гармоники с ненулевой амплитудой произвольного порядка:

$$\begin{cases} v_\mu(\sigma) = a_\mu + b_\mu \cos(\sigma) \\ \rho_\mu(\sigma) = c_\mu + d_\mu \cos(\sigma) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_\mu(\sigma) = a_\mu + b_\mu \cos(\boldsymbol{\nu}\sigma) \\ \rho_\mu(\sigma) = c_\mu + d_\mu \cos(\boldsymbol{\nu}\sigma) \end{cases}$$

$\boldsymbol{\nu}$ – натуральное число

- В результате меняется лишь одно уравнение в условиях Вирасоро, и конечная формула для координат струны имеет схожий вид:

$$\boldsymbol{x_\mu(\tau,\sigma) = (\kappa\pi)^{-1}\left(P_\mu\tau + \nu^{-1}\left[\left(P\Omega(\tau,\nu)\right)\chi_\mu - M\Omega_\mu(\tau,\nu)\right]\cos(\sigma)\right)},$$

$$\Omega_\mu(\tau,\boldsymbol{\nu}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\varphi\sin(\xi\vartheta - \boldsymbol{\nu}\tau) \\ \sin\varphi\sin(\xi\vartheta - \boldsymbol{\nu}\tau) \\ \xi\cos(\xi\vartheta - \boldsymbol{\nu}\tau) \end{pmatrix}, \qquad \Lambda_\mu(\tau) = -\begin{pmatrix} 0 \\ \cos\varphi\cos(\xi\vartheta - \boldsymbol{\nu}\tau) \\ \sin\varphi\cos(\xi\vartheta - \boldsymbol{\nu}\tau) \\ -\xi\sin(\xi\vartheta - \boldsymbol{\nu}\tau) \end{pmatrix}.$$

Обобщение на случай струны с собственной осцилляцией высшего порядка

- **Важнейшее** значение в этом случае имеет соотношение между спином и массой струны:

$$J = \frac{1}{\nu}\frac{M^2}{2\kappa\pi},$$

ν – натуральное число

что означает, что для струны с заданной массой M существует дискретный спектр значений классического спина J, определяемый частотой ν собственной гармоники струны.

- На практике это позволяет «подбирать» частоту ν для определенного из других соображений значения спина струны.
- Например, если масса струны $M = 100$ ГэВ, а ее спин «должен» быть равен $J = {}^1/_2$, собственная гармоника должна задаваться с частотой

$$\nu = \frac{1}{J}\frac{M^2}{2\kappa\pi} \approx 0.8\frac{10^4}{0.5} = 16\,000.$$

Заключение

- Создан метод, позволяющий **корректно** задавать массивную релятивистскую струну со свободными концами в произвольной системе отсчета.
- Метод основан на конечном разложении по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля **(FOEE).**
- Получено решение для первого порядка разложения (случай FOEE(1)-струн).
- Заданные таким образом струны удовлетворяют условиям Вирасоро, условиям на касательные векторы к мировой поверхности струны, законам сохранения 4-импульса и полного углового момента и Лоренц-инвариантности исходной теории.
- Показано, что такие струны обладают **дискретным спектром** значений спина.
- Таким образом, один лишь учет массы струны и ее углового момента приводит к **значительным изменениям** в динамике релятивистских струн, моделирующих массивные системы партонов.
- Очевидно, что существующие модели используют **значительно упрощенное** представление о физике струн, что может приводить к заметным погрешностям модельных предсказаний.

Спасибо за внимание!

Ограничения на движение струны: условия Вирасоро

Из стандартного действия Намбу-Гото для струны

$$S_{\text{string}} = -\kappa \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma \int_{\tau_1(\sigma)}^{\tau_2(\sigma)} d\tau \sqrt{(x'\dot{x})^2 - x'^2\dot{x}^2}$$

следуют уравнения движения (УД):

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{(\dot{x}x')x'_\mu - x'^2\dot{x}_\mu}{\sqrt{(\dot{x}x')^2 - \dot{x}^2x'^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{(\dot{x}x')\dot{x}_\mu - \dot{x}^2x'_\mu}{\sqrt{(\dot{x}x')^2 - \dot{x}^2x'^2}}\right) = 0.$$

$x_\mu(\tau,\sigma)$ есть 2-параметрическое задание мирового листа струны, параметр σ нумерует точки струны, а τ определяет временную эволюцию.

$$\dot{x}_\mu \equiv \frac{\partial x_\mu(\tau,\sigma)}{\partial\tau}$$

$$x'_\mu \equiv \frac{\partial x_\mu(\tau,\sigma)}{\partial\sigma}$$

Чтобы упростить УД вводят специальную калибровку, определяющую связь между параметрами τ и σ:

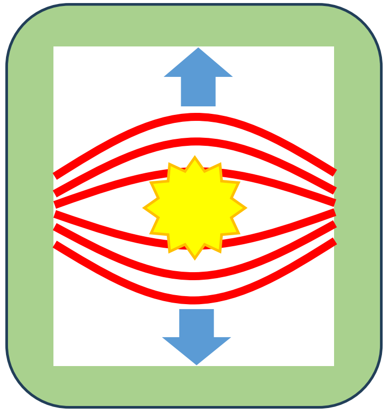
$$\boldsymbol{\dot{x}^2 + x'^2 = 0,\ \ \dot{x}x' = 0.}$$

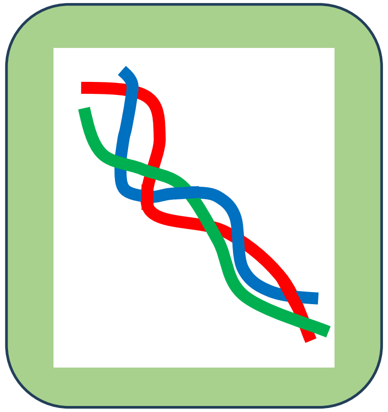
Такая калибровка называется *ортонормальной* и позволяет получить простой вид УД:

$$\ddot{x}_\mu - x''_\mu = 0.$$

Проблемы в современных струнных моделях рождения адронов

- Взаимодействие струн («коллективные эффекты»): «shoving», «rope hadronization»





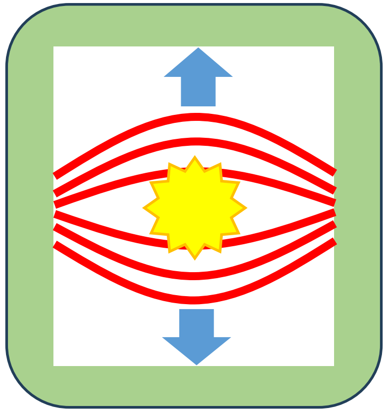
- Наблюдение коллективных эффектов в pp-столкновениях («хребет», увеличение выхода странных частиц и т.д.)
- Учет поперечного сечения «струн» и расталкивания в плотной среде
- Учет «переплетения» струн в веревки с изменением эффективного натяжения

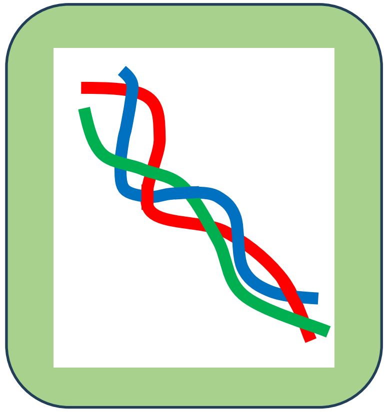
C. Bierlich, S. Chakraborty, G. Gustafson, L. Lönnblad

D. Prokhorova, E. Andronov, G. Feofilov

Проблемы в современных струнных моделях рождения адронов

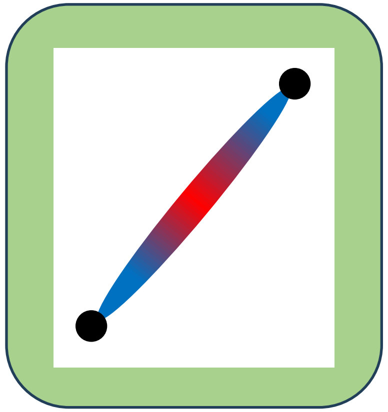
- Взаимодействие струн («коллективные эффекты»): «shoving», «rope hadronization»





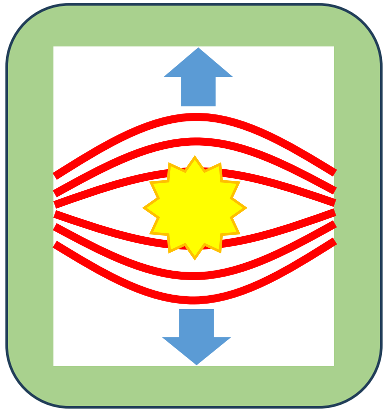
  - Наблюдение коллективных эффектов в pp-столкновениях («хребет», увеличение выхода странных частиц и т.д.)
  - Учет поперечного сечения «струн» и расталкивания в плотной среде
  - Учет «переплетения» струн в веревки с изменением эффективного натяжения

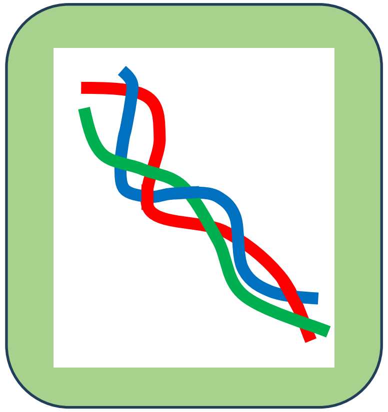
- Переменный коэффициент натяжения струны



Проблемы в современных струнных моделях рождения адронов

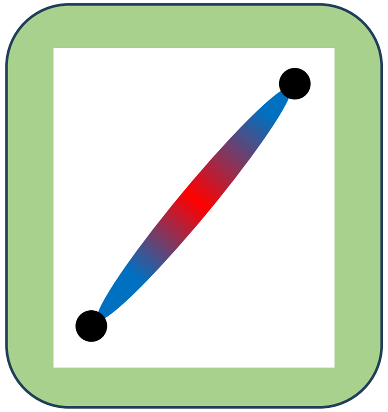
- Взаимодействие струн («коллективные эффекты»): «shoving», «rope hadronization»

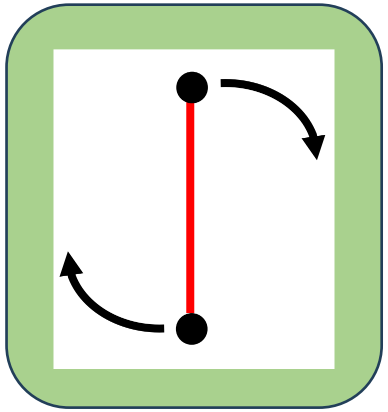




- Наблюдение коллективных эффектов в pp-столкновениях («хребет», увеличение выхода странных частиц и т.д.)
- Учет поперечного сечения «струн» и расталкивания в плотной среде
- Учет «переплетения» струн в веревки с изменением эффективного натяжения

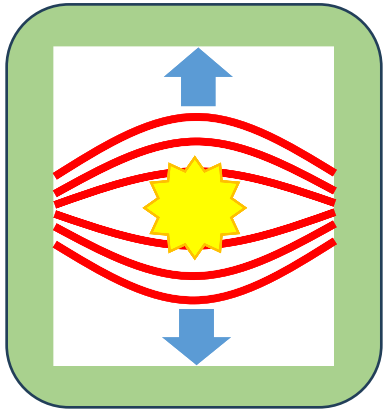
- Сохранение углового момента

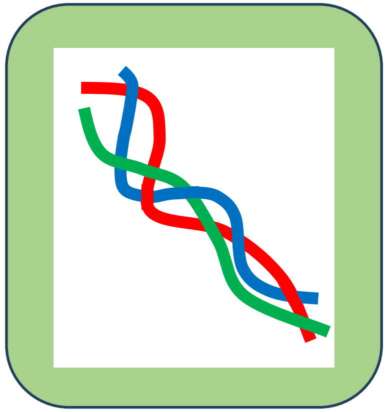




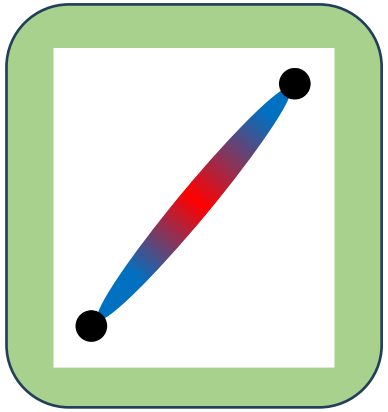
Проблемы в современных струнных моделях рождения адронов

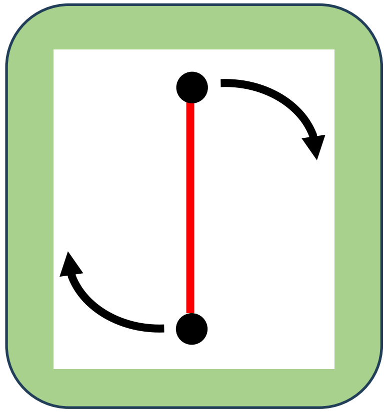
- Взаимодействие струн («коллективные эффекты»): «shoving», «rope hadronization»





- Наблюдение коллективных эффектов в pp-столкновениях («хребет», увеличение выхода странных частиц и т.д.)
- Учет поперечного сечения «струн» и расталкивания в плотной среде
- Учет «переплетения» струн в веревки с изменением эффективного натяжения





- Фрагментация систем с тяжелыми кварками