О 5-петлевой бета-функции $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной сигма модели

Докладчик: Куракин Андрей[1], основано на работе с Алфимовым М.Н

[1]НИУ Высшая школа экономики, Москва

[2]ФИАН, Москва

18 февраля 2025 г.

2D сигма модель

- В общем виде действие сигма модели задается в виде

$$S[X] = \frac{1}{4\pi} \int d^2x \; G_{ij}(X)\partial_\mu X^i \partial^\mu X^j \tag{1}$$

- Будем рассматривать модели с двумерным пространством полей (таргетом).
- Метрика модели $G_{ij}(X)$ зависит от некоторых параметров, которые мы будем интерпретировать как константы связи.
- Параметры модели зависят от масштаба, что может быть описано в терминах уравнения на РГ поток

$$\dot{G}_{ij} + \nabla_i V_j + \nabla_j V_i = -\beta_{ij}(G)\,, \tag{2}$$

где метрика и бета-функция могут быть записаны в виде ряда по степеням кривизны

$$\begin{aligned} G_{ij} &= G_{ij}^{(0)} + G_{ij}^{(1)} + G_{ij}^{(2)} + \dots \\ \beta_{ij}(G) &= \beta_{ij}^{(0)}(G) + \beta_{ij}^{(1)}(G) + \beta_{ij}^{(2)}(G) + \dots\,. \end{aligned} \tag{3}$$

$$G_{ij} \sim \hbar^{-1} \;\Rightarrow\; G^{ij} \sim \hbar\,,\; \nabla_i \sim \hbar^0\,,\;\; R^i{}_{jkl} \sim \hbar^0\,,\; R_{ij} \sim \hbar^0\,,\; R \sim \hbar\,,\; \text{и т.д.} \tag{4}$$

Мотивация

- Известно, что для $O(3)$ существует схема регуляризации, в которой метрика имеет нетривиальный вклад только $\sim \hbar^0$ вплоть до 4-ой петли (Alfimov, Litvinov 2021)
- Хотим построить обобщение для случай таргет пространств произвольной размерностей
- Наиболее просто бета-функция выглядит для случая суперсимметричных моделей. В частности для $\mathcal{N} = 1$ и $\mathcal{N} = 2$ она известна до 4-ой и 5-ой петли соответсвенно.

$\mathcal{N} = 2$ суперсимметричная модель

Перейдем непосредственно к рассмотрению $\mathcal{N} = 2$ сигма модели. Таргет – кэлерово многообразие. Действие дается как

$$S = \frac{1}{4\pi} \int d^2 z \, d\theta \, d\bar{\theta} \; K(\phi^{\mu}, \bar{\phi}^{\bar{\nu}}) \,, \tag{5}$$

где K – кэлеров потенциал. Метрика выражается как вторая производная от потенциала

$$G_{\mu\bar{\nu}}(\phi^{\mu}, \bar{\phi}^{\bar{\nu}}) = \frac{\partial^2 K}{\partial \phi^{\mu} \partial \bar{\phi}^{\bar{\nu}}} \,, \tag{6}$$

где греческие индексы относятся к кэлеровым координатам, латинские к действительным.

РГ уравнение

Уравнение ренормгруппового потока записанное в терминах кэлерова потенциала имеет вид

$$\dot{K}(\tau) = -\beta_K\left(K(\tau)\right) . \tag{7}$$

Бета-функция $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной сигма модели в MS схеме вычислена вплоть до 5-ой петли (Grisaru et al., 1987, 1986; Kazakov, 1987)

$$\beta_K = -\frac{1}{2}\log\det G + \frac{\zeta(3)}{12}\Delta K + \beta_K^{(5)} + \mathcal{O}(\hbar^5)\,, \tag{8}$$

где ΔK дается выражением

$$\Delta K = R^{\mu}{}_{\nu}{}^{\tau}{}_{\lambda}\left(R^{\rho}{}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{\tau}R^{\nu}{}_{\rho}{}^{\lambda}{}_{\alpha} + R^{\lambda}{}_{\tau}{}^{\rho}{}_{\alpha}R^{\alpha}{}_{\rho}{}^{\nu}{}_{\mu}\right) = \frac{1}{2}R_{ijkl}R^{i}{}_{mn}{}^{k}\left(R^{jnml} + R^{jlmn}\right) .$$

Бета-функция зависит от схемы регуляризации.
В общем виде замена схемы регуляризации в терминах кэлерова потенциала может быть записана следующим образом

$$K \to \tilde{K}(K) = K + c_1 \log\det G + c_2 R + \underbrace{c_3 R^2 + c_4 (R_{ijkl})^2 + c_5 (R_{ij})^2 + c_6 \nabla^2 R}_{\text{4 скаляра порядка } \hbar^2} + \qquad (9)$$

$$+ \underbrace{c_7 R^3 + \ldots + c_{23} \nabla^2 \nabla^2 R}_{\text{16 скаляров порядка } \hbar^3} + \ldots$$

В действительности не все скаляры, записанные в действительных координатах, линейно независимы из-за кэлеровой структуры многообразия.

Замена схемы регуляризации

От MS схемы путем перепеопределения кэлерова потенциала перейдем к следующей схеме (Alfimov et al., 2024)

$$K \to \tilde{K}(K) = K + c_1 \log\det G + c_2 R + c_3 (R_{ij})^2 + c_4 \nabla^2 R\,, \tag{10}$$

Положив коэффициенты в схеме регуляризации равными

$$c_2 = \frac{c_1^2}{2}\,, \quad c_3 = -\frac{2c_1^3}{3} + \frac{5\zeta(3)}{48}\,, \quad c_4 = -\frac{c_1^3}{4} + \frac{\zeta(3)}{48}\,, \tag{11}$$

придем к РГ уравнению вида

$$\dot{K} = \frac{1}{2}\log\det G - \Delta\tilde{K} + \mathcal{O}(\hbar^4)\,, \tag{12}$$

где

$$\Delta\tilde{K} = \frac{\zeta(3)}{24}\left(R_{ijkl} R^i{}_{mn}{}^k (R^{jnml} + R^{jlmn}) - 6R^{ij} R^{kl} R_{ikjl} + R^{ij} R_{ik} R^k{}_j - 3R^{ij} \nabla^2 R_{ij} + \frac{3}{4}\nabla^2 R_{ij}^2\right)\,. \tag{13}$$

– инвариант на метрике сосиски (известны и др. метрики)

$$ds^2 = \frac{2\kappa}{\hbar}\frac{d\theta^2 + \cos^2\theta\, d\chi^2}{1 - \kappa^2 \sin^2\theta} \tag{14}$$

Бета функция в 5-ой петле

Вклад 5-ой петли в бета функцию был вычислен (Grisaru et al., 1987, 1986; Kazakov, 1987)

$$\beta_K^{(5)} = \frac{\zeta(4)}{40}\left[\nabla^\sigma\nabla_\sigma\Delta K - 3(\nabla_\rho\nabla^\sigma R_\nu{}^\mu - R^\pi{}_\rho R_\pi{}^\sigma{}_\nu{}^\mu)(R_\sigma{}^\alpha{}_\mu{}^\tau R_\alpha{}^\rho{}_\tau{}^\nu + R_\mu{}^\nu{}_\alpha{}^\tau R_\tau{}^\alpha{}_\sigma{}^\rho)\right],$$

где

$$\Delta K = \frac{\zeta(3)}{12} R^\mu{}_\nu{}^\tau{}_\lambda \left(R^\rho{}_\mu{}^\alpha{}_\tau R^\nu{}_\rho{}^\lambda{}_\alpha + R^\lambda{}_\tau{}^\rho{}_\alpha R^\alpha{}_\rho{}^\nu{}_\mu\right). \tag{15}$$

Заменой схемы регуляризации можно избавиться от вклада пятой петли в MS схеме

$$K \to K = K + \frac{\zeta(4)}{160} R_{ijkl} R^i{}_{mn}{}^k R^{jnml} + \frac{191\zeta(4)}{160} R_{ijkl} R^i{}_{mn}{}^k R^{jlmn} \tag{16}$$

$$\dot{K} = \frac{1}{2}\log\det G - \frac{\zeta(3)}{48} R_{ijkl} R^i{}_{mn}{}^k \left(R^{jnml} + R^{jlmn}\right) + \mathcal{O}(\hbar^5). \tag{17}$$

В схеме с инвариантом $\Delta\tilde{K}$ в 4-ой петле удается прийти к схем, в которой

$$\beta_K^{(5)} \sim \nabla^2\Delta\tilde{K} \tag{18}$$

Заключение

- Можно избавиться от вклада 5-ой петли, возникающего в MS схеме регуляризации, путем ковариантного переопределения кэлерова потенциала.
- Можно перейти в такую схему регуляризации, в которой в 4-ой и 5-ой петлях вклады в бета-функцию $\beta_{ij}(G)$ зануляются ($\beta_K = \text{const}$).