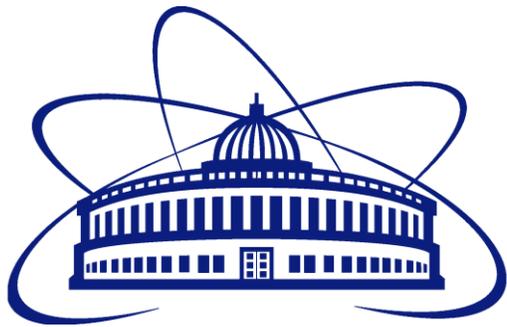


Сессия-конференция секции ядерной физики ОФН РАН,
посвященная 70-летию В.А. Рубакова

Эффективный потенциал в неперенормируемых теориях в искривленном пространстве-времени



Филиппов В.А., Толкачев Д.М., Яхиббаев Р.М.

ОИЯИ ЛТФ

План

- **Эффективный потенциал** для скалярного поля с учетом неминимального взаимодействия с гравитацией
- **Обобщенные ренормгрупповые (РГ) уравнения**
- **Случай степенных потенциалов**
- **Применение в теории космологической инфляции**

Вклад неминимального взаимодействия

Действие скалярной теории с неминимальным гравитационным взаимодействием

$$S[g_{\mu\nu}, \varphi] = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} R + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial^\mu \varphi \partial^\nu \varphi + \frac{1}{2} \xi R \varphi^2 - \lambda V_0(\varphi) \right)$$

Эффективное действие и **эффективный потенциал**

$$\Gamma[\varphi, g_{\mu\nu}] = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ -V_{eff}(\varphi) + \frac{1}{2} Z(\varphi) g_{\mu\nu} \partial^\mu \varphi \partial^\nu \varphi + \dots \right\}$$

Разложение около точки x'

$$g_{\alpha\beta}(x) = g_{\alpha\beta}(x') - \frac{1}{3} R_{\alpha\mu\beta\nu}(x') y^\mu y^\nu + \dots \quad y = x - x'$$

Модифицированный фейнмановский **пропагатор**

$$G(y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{iky} \left\{ \frac{1}{k^2 + \bar{m}^2} - \frac{(\xi - 1/6) R}{(k^2 + \bar{m}^2)^2} + \dots \right\} \quad \bar{m} = \lambda V_0''(\varphi)$$

Bunch, Parker'74

Правила Фейнмана

Разложение эффективного потенциала

$$V_{eff} = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{\lambda}{16\pi^2} \right)^k V_k$$

Однопетлевая поправка, вычисленная стандартным образом через $-\text{tr} \log G(x, x')$:

$$V_1 = \mathbf{V}_1 + \mathbf{W}_1$$

$$\mathbf{V}_1 = \frac{1}{4} v_2^2 \left(\frac{1}{\epsilon} + \log \left(\frac{\mu}{\bar{m}} \right) \right)$$

$$\mathbf{W}_1 = \frac{1}{2} v_2 \hat{\xi} R \left(\frac{1}{\epsilon} + \log \left(\frac{\mu}{\bar{m}} \right) \right)$$

где $\hat{\xi} = 1/6 - \xi$.

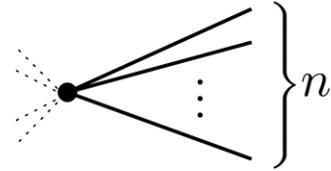
Sobreira, Ribeiro, Shapiro'11

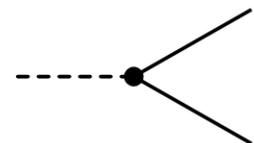
Коэффициенты при ведущем логарифме $\log^n \varphi$ и лидирующими полюсными членами $1/\epsilon^n$ совпадают

$$\frac{1}{\epsilon} \rightarrow -\log \left(\frac{\lambda v_2(\varphi)}{\mu^2} \right)$$

Правила Фейнмана: $(d = 4 - 2\epsilon)$

$$G(k^2) \sim \frac{1}{k^2 + \bar{m}^2}$$


$$v_n = \frac{\partial^n V}{\partial \varphi^n}$$


$$\hat{\xi} R$$


Соответствующие однопетлевые диаграммы:



Рис. 1 Однопетлевые диаграммы, дающие вклад в V_1 и W_1 соответственно

Рекуррентные соотношения

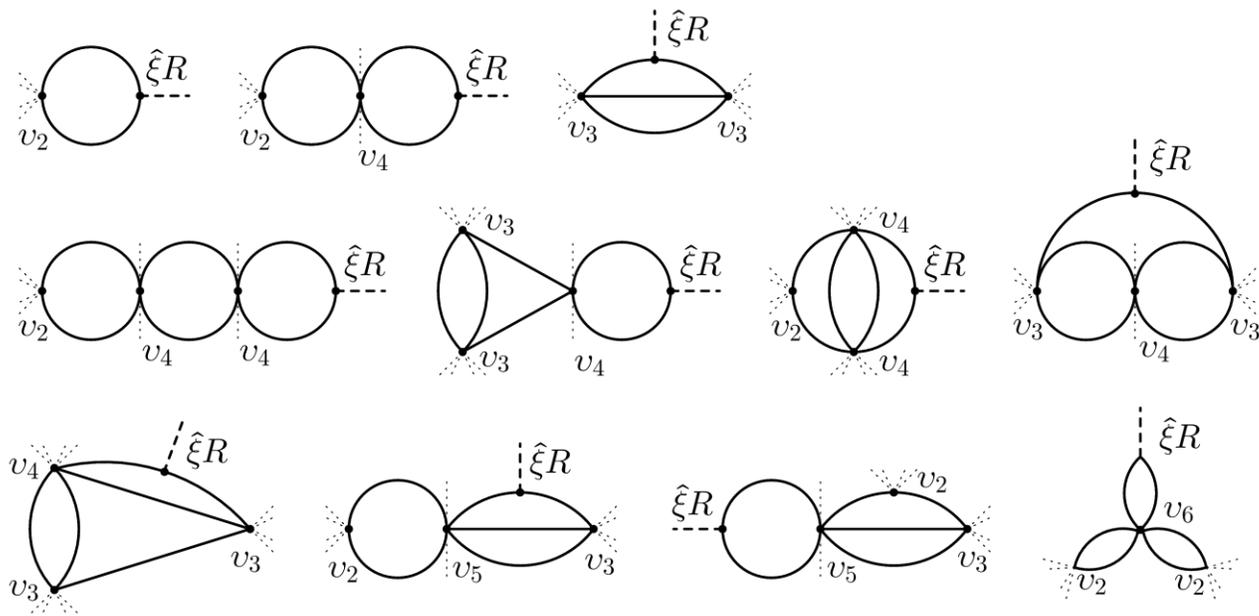


Рис. 2 Одно-, двух- и трехпетлевые диаграммы, дающие вклад в W_n

Соответствующие одно-, двух- и трехпетлевые вклады:

$$V_1 = \mathbf{V}_1 + \mathbf{W}_1$$

$$\mathbf{V}_1 = \frac{1}{4\epsilon} v_2^2$$

$$\mathbf{W}_1 = \frac{1}{2\epsilon} v_2 \hat{\xi} R$$

$$\Delta V_2 = \Delta \mathbf{V}_2 + \Delta \mathbf{W}_2$$

$$\Delta \mathbf{V}_2 = \frac{1}{8\epsilon^2} v_4 v_2^2 + \frac{1}{8\epsilon^2} v_3^2 v_2$$

$$\Delta \mathbf{W}_2 = \frac{1}{8\epsilon^2} v_3^2 \hat{\xi} R + \frac{1}{4\epsilon^2} v_2 v_4 \hat{\xi} R$$

$$\Delta V_3 = \Delta \mathbf{V}_3 + \Delta \mathbf{W}_3$$

$$\Delta \mathbf{V}_3 = \frac{1}{48\epsilon^3} v_3^4 + \frac{3}{16\epsilon^3} v_2 v_4 v_3^2 + \frac{1}{8\epsilon^3} v_2^2 v_5 v_3 + \frac{5}{48\epsilon^3} v_2^2 v_4^2 + \frac{1}{48\epsilon^3} v_2^3 v_6$$

$$\Delta \mathbf{W}_3 = \frac{1}{16\epsilon^3} \hat{\xi} R v_6 v_2^2 + \frac{5}{24\epsilon^3} \hat{\xi} R v_4^2 v_2 + \frac{1}{4\epsilon^3} \hat{\xi} R v_3 v_5 v_2 + \frac{3}{16\epsilon^3} \hat{\xi} R v_3^2 v_4$$

$$n \begin{array}{c} \text{circle} \\ A_n \end{array} = -2 \begin{array}{c} \text{circle} \\ A_{n-1} \end{array} - \sum_{k=1}^{n-2} \begin{array}{c} \text{circle with dashed outer} \\ A_k \end{array} \begin{array}{c} \text{circle} \\ A_{n-k-1} \end{array}$$

Рис. 3 Рекуррентные соотношения для ведущих расходимостей

Рекуррентные соотношения для связи коэффициентов при старших полюсах:

$$n \Delta \mathbf{V}_n = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \Delta \mathbf{V}_k \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \Delta \mathbf{V}_{n-k-1}$$

$$n \Delta \mathbf{W}_n = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \Delta \mathbf{W}_k \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \Delta \mathbf{V}_{n-k-1}$$

Обобщенные РГ уравнения

Рекуррентные соотношения:

$$n\Delta\mathbf{V}_n = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \Delta\mathbf{V}_k \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \Delta\mathbf{V}_{n-k-1}$$

$$n\Delta\mathbf{W}_n = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \Delta\mathbf{W}_k \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \Delta\mathbf{V}_{n-k-1}$$

Выделяя суммы ведущих расходимостей в каждом порядке $\Sigma_\lambda(z, \varphi)$ и $\Sigma_\xi(z, \varphi)$ с параметром разложения

$$z = \frac{\lambda}{16\pi^2\epsilon} :$$

$$\Sigma_\lambda(z, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n \Delta\mathbf{V}_n, \quad \Sigma_\xi(z, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n \Delta\mathbf{W}_n$$

можно получить обобщенные РГ-уравнения

$$\frac{\partial\Sigma_\lambda}{\partial z} = -\frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2\Sigma_\lambda}{\partial\varphi^2} \right)^2$$

$$\frac{\partial\Sigma_\xi}{\partial z} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2\Sigma_\xi}{\partial\varphi^2} \frac{\partial^2\Sigma_\lambda}{\partial\varphi^2}$$

начальные условия:

$$\Sigma_\lambda(0, \varphi) = V_0(\varphi)$$

$$\Sigma_\xi(0, \varphi) = 1/2 \hat{\xi}R\varphi^2$$

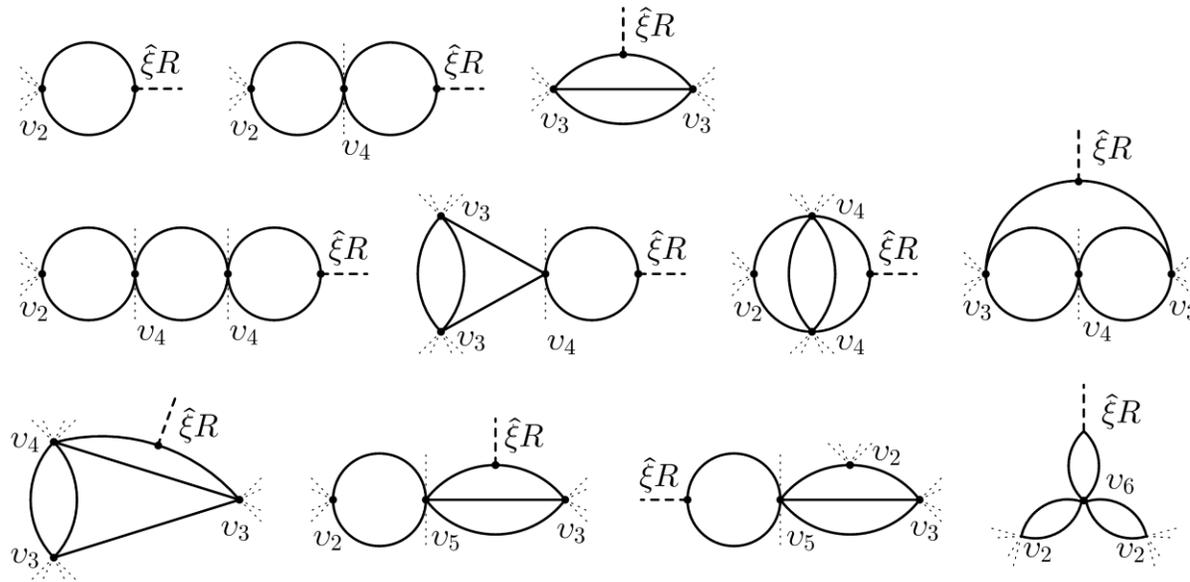


Рис. 2 Одно-, двух- и трехпетлевые диаграммы, дающие вклад в W_n

Эффективный потенциал

$$V_{eff} = \lambda\Sigma_\lambda(z, \varphi) - \left(\frac{1}{12}R\varphi^2 - \Sigma_\xi(z, \varphi) \right) \Big|_{z \rightarrow -\frac{\lambda}{16\pi^2} \log(\lambda v_2/\mu^2)}$$

Степенной потенциал

Степенной потенциал вида:

$$V_0 = \frac{\varphi^p}{p!}$$

Удобно перейти к безразмерным функциям f_1 и f_2 :

$$\Sigma_\lambda(z, \varphi) = \frac{\varphi^p}{p!} f_1(y) \quad y = z\varphi^{p-4}$$

$$\Sigma_\xi(z, \varphi) = \hat{\xi} R \frac{\varphi^2}{2!} f_2(y)$$

Система обобщенных РГ уравнений

$$-4p!f_1'(y) = [p(p-1)f_1(y) + (p-4)(3p-5)yf_1'(y) + (p-4)^2y^2f_1''(y)]^2,$$

$$-2p!f_2'(y) = [(p-4)y((3p-5)f_1'(y) + (p-4)yf_1''(y)) + (p-1)pf_1(y)] \times \\ \times [(p-4)y((p-1)f_2'(y) + (p-4)yf_2''(y)) + 2f_2(y)]$$

Начальные условия

$$f_1(0) = 1, \quad f_1'(0) = -\frac{p(p-1)}{4(p-2)!}$$

$$f_2(0) = 1, \quad f_2'(0) = -\frac{1}{(p-2)!}$$

$$\Sigma_\lambda(z, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n \Delta \mathbf{V}_n$$

$$\Sigma_\xi(z, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n \Delta \mathbf{W}_n$$

Случай $\lambda\varphi^4$

Начальный потенциал:

$$V_0 = \frac{\varphi^4}{4!}$$

Система **обобщенных**
РГ уравнений:

$$f_1'(z) = -\frac{3}{2}f_1^2(z),$$

$$f_2'(z) = -\frac{1}{2}f_1(z)f_2(z)$$

Переход к f_1 и f_2 :

$$\Sigma_\lambda(z, \varphi) = \frac{\varphi^4}{4!} f_1(z),$$

$$\Sigma_\xi(z, \varphi) = \hat{\xi} R \frac{\varphi^2}{2!} f_2(z)$$

Решения:

$$f_1(z) = \frac{1}{1 + \frac{3}{2}z},$$

$$f_2(z) = \left(1 + \frac{3}{2}z\right)^{-1/3}$$

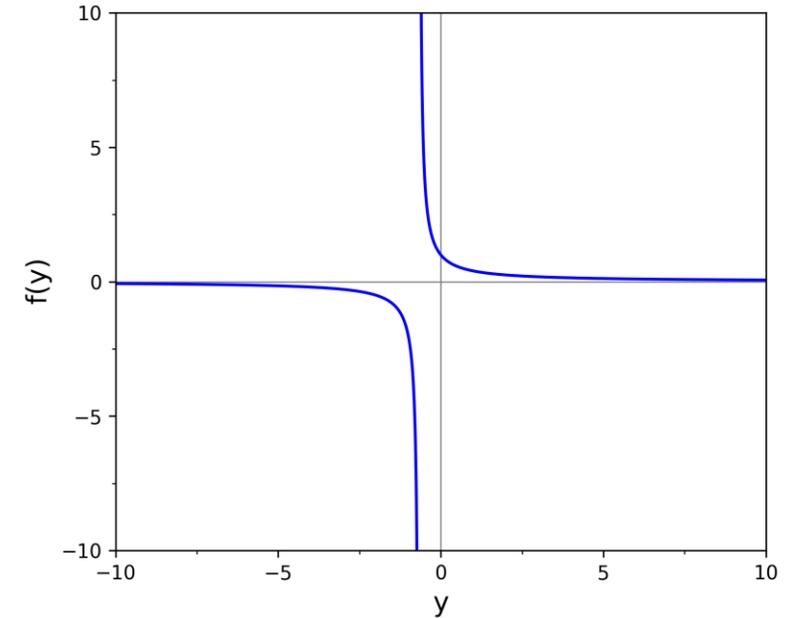


Рис. 4 Общий вид решения $f_1(y)$

Эффективный потенциал

$$V_{eff} = \frac{\lambda\varphi^4}{4!} \frac{1}{1 - \frac{3}{2} \frac{\lambda}{(4\pi)^2} \log\left(\frac{\lambda\varphi^2}{2\mu^2}\right)} - \frac{1}{2} R \varphi^2 \left[\frac{1}{6} - \hat{\xi} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\lambda}{(4\pi)^2} \log\left(\frac{\lambda\varphi^2}{2\mu^2}\right) \right)^{-1/3} \right]$$

Ishikawa'83

СООТВЕТСТВИЕ

Случай степенного потенциала $p = 4 + \delta$

Потенциал:

$$V_0 = \frac{\varphi^p}{p!} \quad p = 4 + \delta$$

Переход к $f_1(y)$ и $f_2(y)$:

$$\Sigma_\lambda(z, \varphi) = \frac{\varphi^p}{p!} f_1(y) \quad y = z\varphi^{p-4}$$
$$\Sigma_\xi(z, \varphi) = \hat{\xi} R \frac{\varphi^2}{2!} f_2(y)$$

Обобщенные РГ уравнения в **линейном приближении** по $\delta \ll 1$:

$$4\Gamma(5 + \delta)f_1'(y) = -6f(y) (7y\delta f_1'(y) + (7\delta + 6)f_1(y))$$

$$2\Gamma(5 + \delta)f_2'(y) = -7y\delta f_2(y)f_1'(y) - f_1(y) (18y\delta f_2'(y) + (7\delta + 12)f_2(y))$$

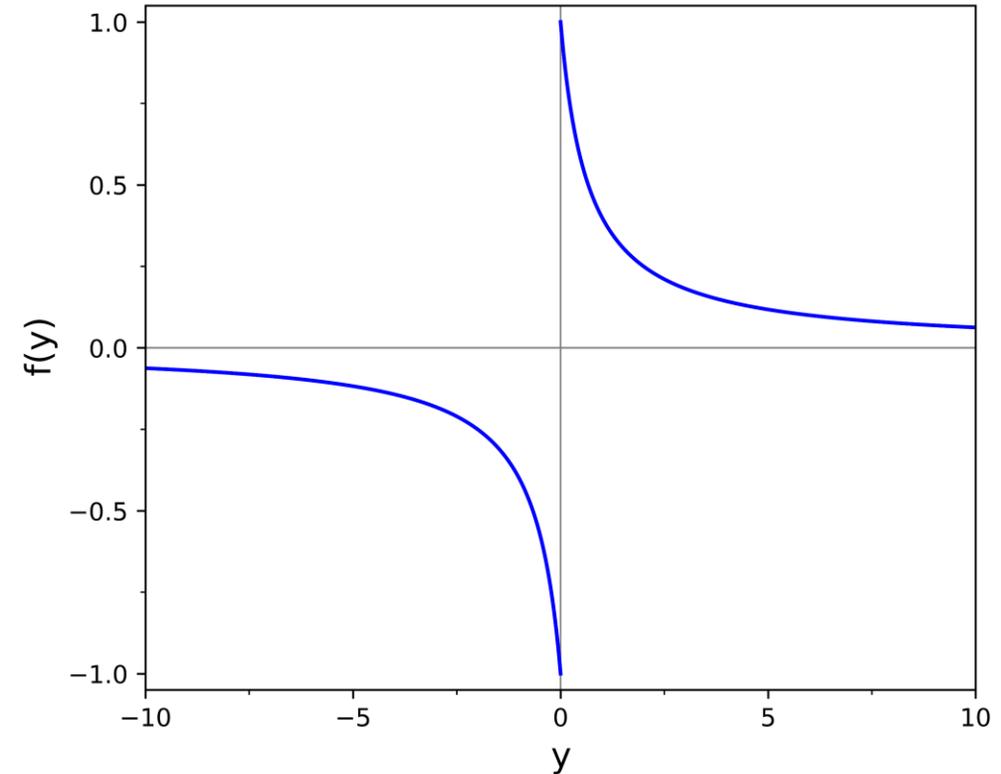


Рис. 5 Общий вид решений для $f_1(y)$ и $f_2(y)$

Случай степенного потенциала $p = 4 + \delta$

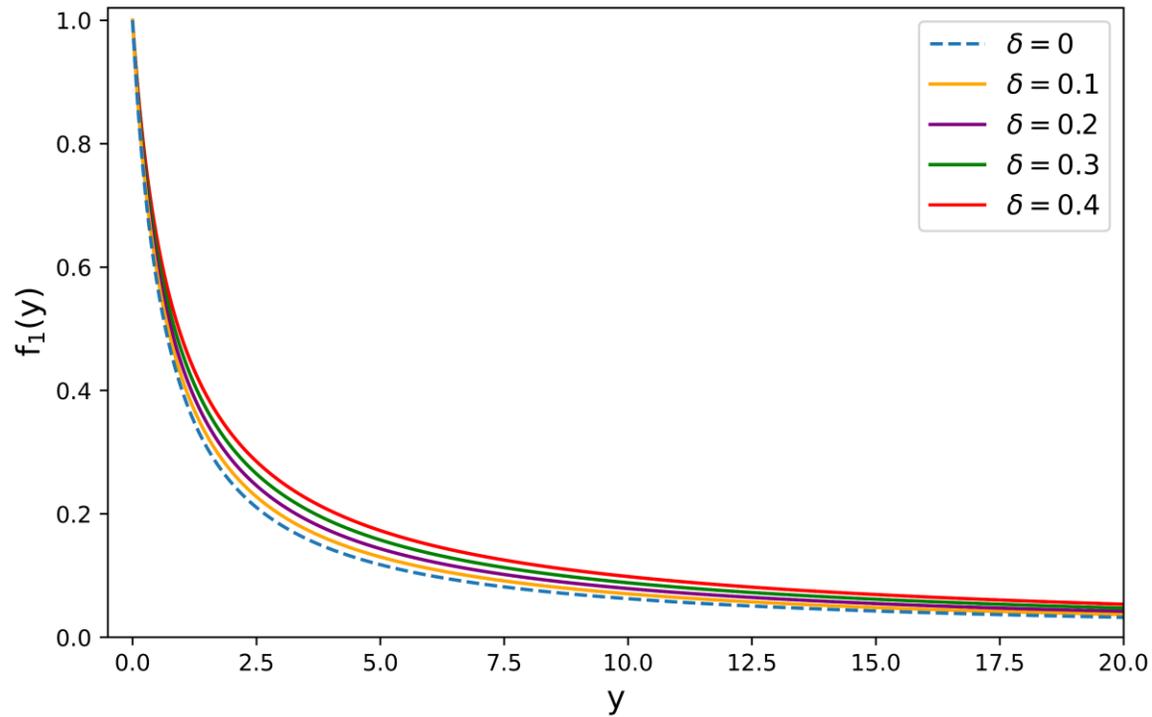


Рис. 6 Решения $f_1(y)$ для различных δ

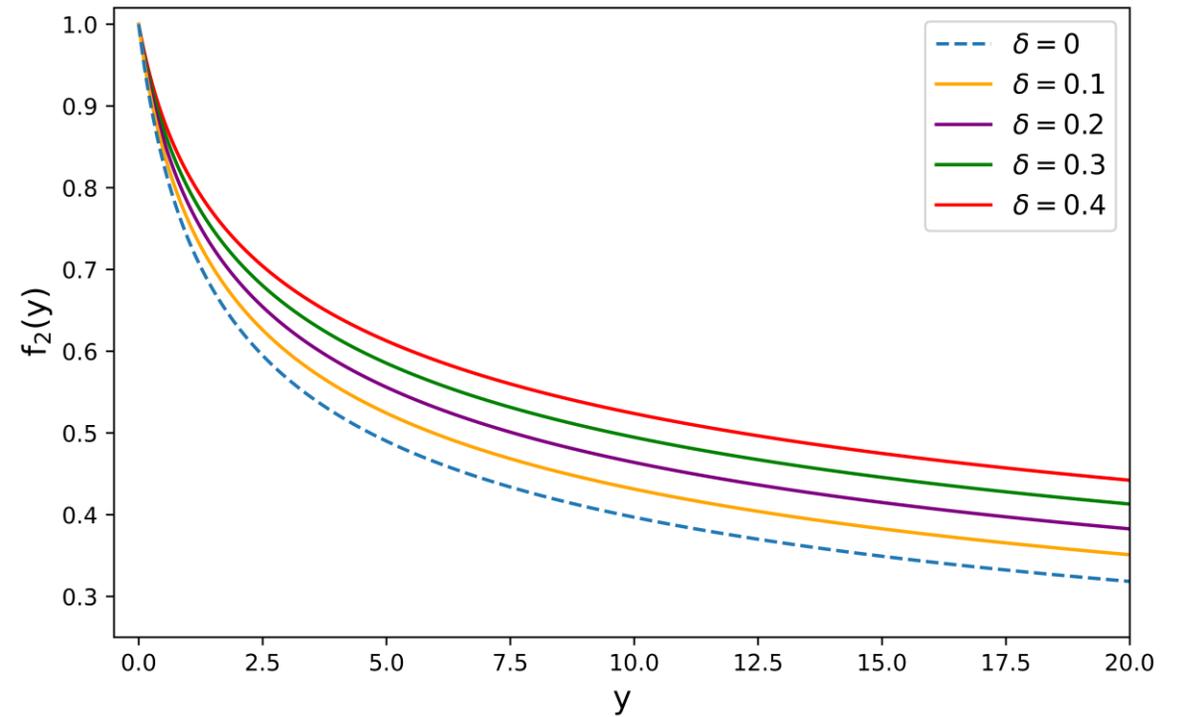
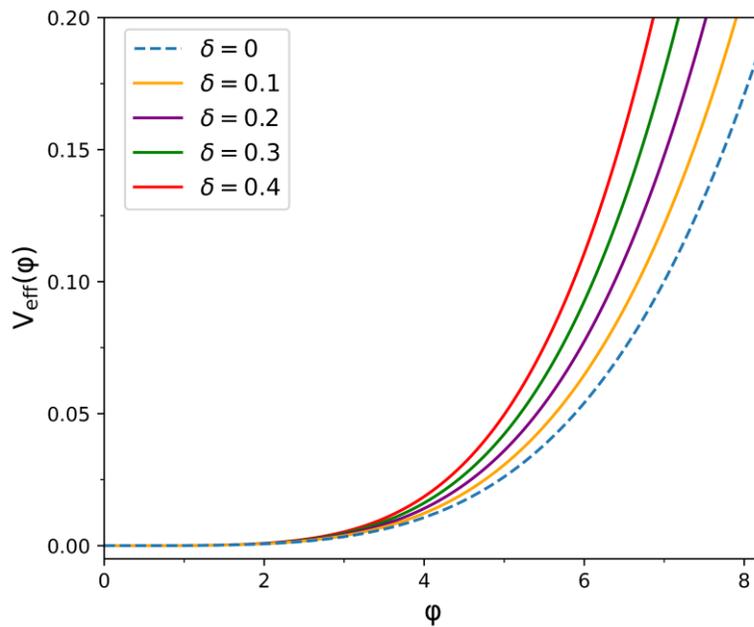
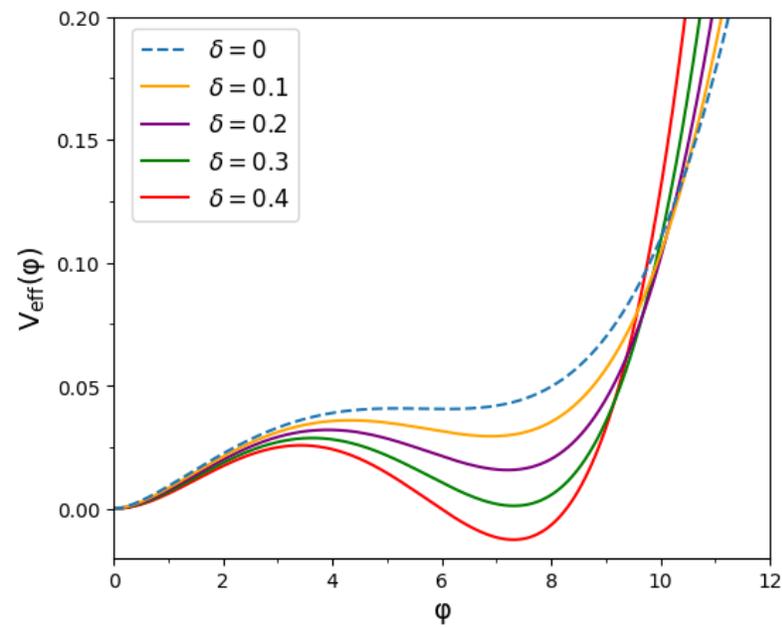


Рис. 7 Решения $f_2(y)$ для различных δ

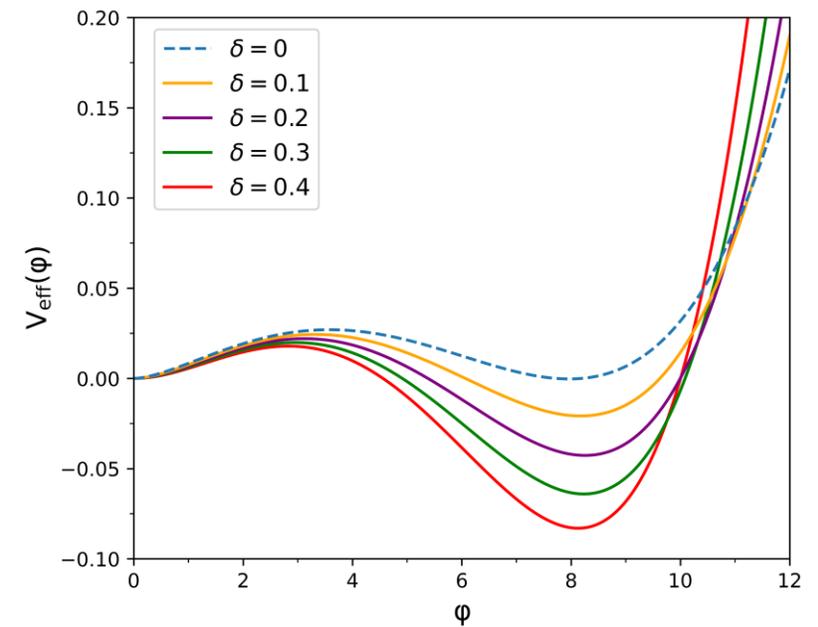
Случай степенного потенциала $p = 4 + \delta$



a) $R = 0$



b) $R = R_{C1}$



c) $R = R_{C2}$

Рис. 8 Эффективный потенциал V_{eff} для $\xi = 0$ для различных критических значений $R = \{0, R_{C1}, R_{C2}\}$ и $\delta \in [0, 0.4]$.
В качестве критических значений были выбраны $R_{C1} \simeq -3.2 \cdot 10^2 \mu^2$, $R_{C2} \simeq -4.3 \cdot 10^2 \mu^2$

Инфляционная космология

Действие для скалярной теории космологической инфляции:

$$S[g_{\mu\nu}, \varphi] = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} F(\varphi) R + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial^\mu \varphi \partial^\nu \varphi - V(\varphi) \right),$$

где в рассматриваемом случае

$$F(\varphi) = \frac{1}{2}(1 + \xi\varphi^2).$$

Параметры медленного скатывания:

$$\epsilon = \frac{1}{2\mathcal{K}} \left(\frac{V_\varphi}{V} - 2\frac{F_\varphi}{F} \right)^2, \quad \eta = \frac{1}{\mathcal{K}} \left[2\frac{F_{\varphi\varphi}}{F} - \frac{V_{\varphi\varphi}}{V} - 2\frac{F_\varphi^2}{F^2} + \frac{V_\varphi^2}{V^2} + \frac{\mathcal{K}_\varphi}{2\mathcal{K}} \left(\frac{V_\varphi}{V} - 2\frac{F_{,\varphi}}{F} \right) \right],$$

где

$$\mathcal{K}(\varphi) = \frac{1}{F} + \frac{3}{2} \left(\frac{F_\varphi}{F} \right)^2.$$

Karčiauskas, Díaz' 22

Наклон спектра скалярных возмущений

$$n_s - 1 \simeq -2(\epsilon + \eta)$$

Отношение тензорного и скалярного спектров

$$r \simeq 16\epsilon$$

Число e-фолдов

$$N \simeq \int_\varphi^{\varphi_{\text{end}}} \frac{\mathcal{K}}{2\frac{F_\varphi}{F} - \frac{V_\varphi}{V}} d\varphi$$

Сравнение с наблюдаемыми данными

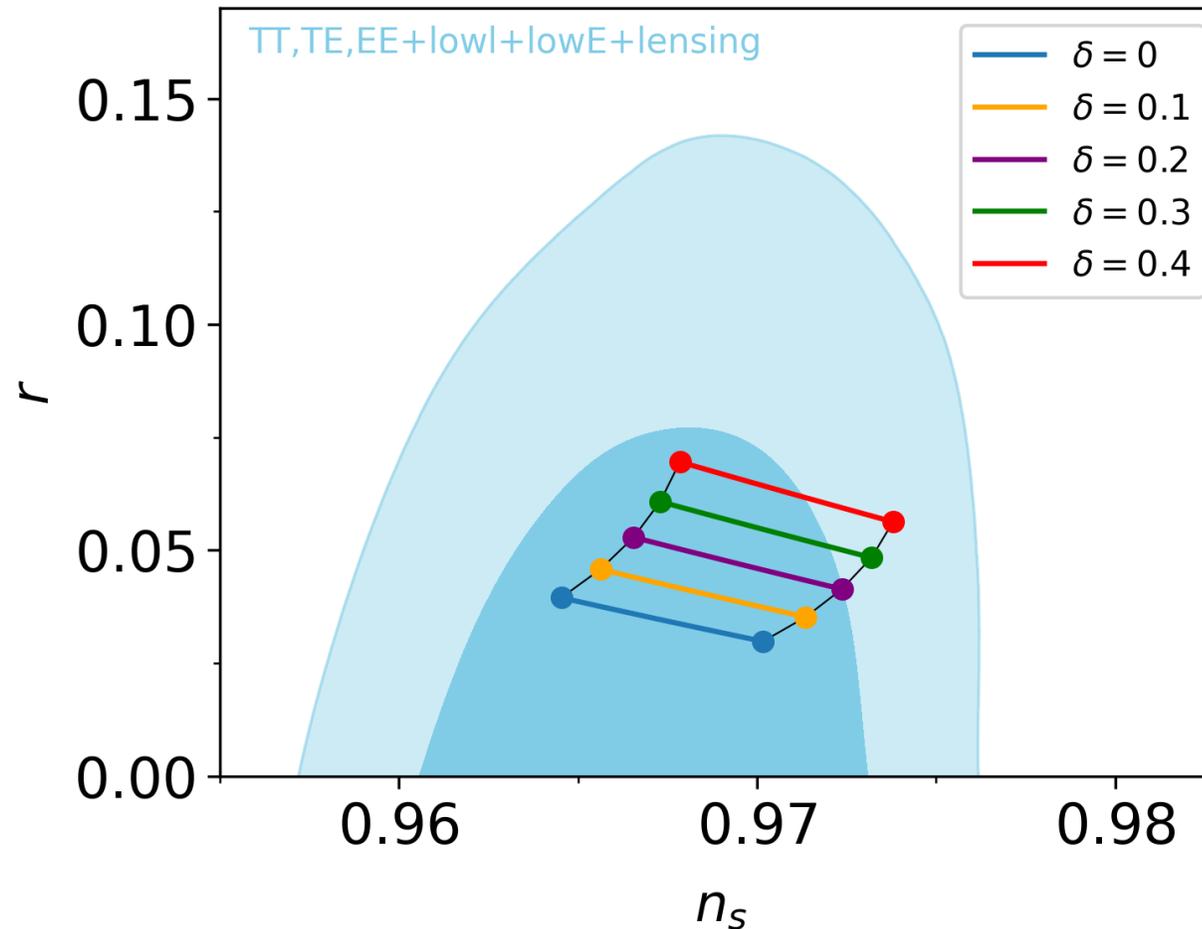


Рис. 9 Сравнение рассчитанных космологических параметров для степенного потенциала с $p = 4 + \delta$ на диаграмме (n_s, r) с наблюдаемыми данными PLANCK 2018

Выводы

- Получены обобщенные **РГ уравнения** с учетом неминимального взаимодействия с гравитацией
- Решения уравнений находятся в соответствии с перенормируемой теорией $\lambda\varphi^4$
- Произведен **анализ критического поведения** степенного потенциала с $p = 4 + \delta$
- В рамках рассматриваемой модели подобраны параметры для успешного соответствия наблюдаемым данным *PLANCK 2018*

Спасибо за внимание