

Силы взаимодействия кинков в полиномиальных моделях высоких порядков

Екатерина Белендрясова

Институт проблем безопасного развития атомной энергетики (ИБРАЭ РАН)

Сессия-конференция секции ядерной физики Отделения физических наук Российской академии наук,
посвящённая 70-летию В.А. Рубакова

21 февраля 2025 г.

1. Модель

2. Аналитическая оценка силы взаимодействия кинка (K) и антикинка (\bar{K})

3. Численные результаты

3.1 Начальные условия для изучения $K\bar{K}$ динамики

3.2 Эволюция $K\bar{K}$ системы

3.3 Численная оценка силы взаимодействия

4. Заключение

Модель

Рассматривается модель с лагранжианом:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - V(\varphi) \quad (1)$$

φ – скалярное поле в (1+1) пространстве-времени.

Потенциал задается с помощью целого параметра $n \geq 2$:

$$V(\varphi) = \frac{1}{2} (1 + \varphi)^2 (1 - \varphi)^{2n} \quad (2)$$

Уравнение движения:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{dV}{d\varphi} = 0$$

В статическом случае (уравнение BPS):

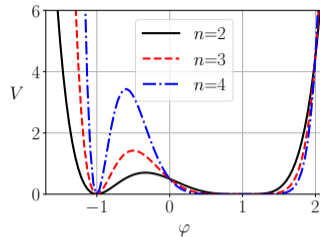
$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} - \frac{dV}{d\varphi} = 0 \implies \frac{d\varphi}{dx} = \pm \sqrt{2V} \quad (3)$$

Кинк:

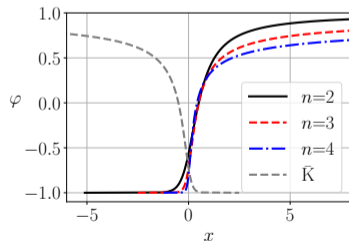
$$x - A = \frac{1}{2^n} \ln \frac{1 + \varphi_K}{1 - \varphi_K} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j \cdot 2^{n-j}} \frac{1}{(1 - \varphi_K)^j}, \quad (4)$$

$$\varphi_K(x) \approx \begin{cases} -1 + 2 \exp[2^n(x - A)], & x \rightarrow -\infty, \\ 1 - \frac{[2(n-1)]^{1/(1-n)}}{(x-A)^{1/(n-1)}}, & x \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (5)$$

Силы взаимодействия кинков в полиномиальных моделях высоких порядков



(a) Потенциал (2) модели (1)



(b) Кинки модели (1), $A = 0$

Рис. 1: Потенциал и кинки модели

Замечание об энергии и суперпотенциале

Полная энергия поля

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + V(\varphi) \right] dx \quad (6)$$

Статическая энергия одного кинка (или масса кинка):

$$M_K \equiv E_{\text{static}} = \frac{2^{n+2}}{(n+1)(n+2)} \quad (7)$$

Кинк и антикинк имеют минимальную энергию среди всех полевых конфигураций, соединяющих данные вакуумы модели. Не существует двухсолитонных ($K\bar{K}$) решений. Линейная суперпозиция K и \bar{K} не является решением.

Суперпотенциал W

$$V(\varphi) = \frac{1}{2} \left(\frac{dW}{d\varphi} \right)^2 \quad (8)$$

$$M_K = |W[\varphi(+\infty)] - W[\varphi(-\infty)]| \quad (9)$$

Энергия части кинка на интервале $[x_1, x_2]$

$$E_{\text{tail}}(A) = |W[\varphi_K(x_1)] - W[\varphi_K(x_2)]| \quad (10)$$

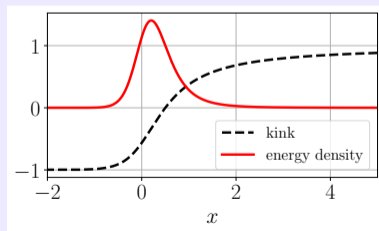
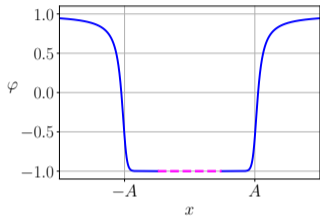


Рис. 2: Плотность энергии кинка убывает на правой границе медленнее, чем на левой

Аналитическая оценка силы взаимодействия K и \bar{K}

Для экспоненциальных асимптотик поле между K и \bar{K} мало отличается от вакуумного:

$$|1 + \varphi| \sim \exp[-2^n |x - A|], \quad x \ll A$$



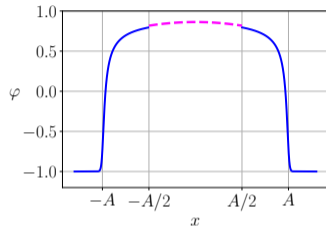
$$P = - \int_{-\infty}^{x_b} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx, \quad -A \ll x_b \ll A \quad (11)$$

$$F_{\text{exp}} = \frac{dP}{dt} \approx \quad (12)$$

$$\approx -2^{2n+1} (1 - 2^{1-n}) \exp(-2^{n+1} A) \quad (13)$$

Для степенных асимптотик поле между K и \bar{K} отличается от вакуумного значительно:

$$|1 - \varphi| \sim 1/|x - A|^{1/(n-1)}, \quad x \ll A$$



Заменим поле между K и \bar{K} на $\varphi_{\text{quad}}(x) = \alpha + \beta x^2$.

Энергия конфигурации

$$E(A) = E_{\text{quad}}(A) + 2 [M_K - E_{\text{tail}}(A)], \quad (14)$$

$$F_{\text{pow}}(A) = - \frac{\partial E}{\partial (2A)} = \quad (15)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n-1} \cdot \underbrace{\left[\varepsilon(n) - \frac{4}{n+1} (n-1)^{(n+1)/(1-n)} \right]}_{<0} \cdot \frac{1}{A^{2n/(n-1)}}$$

Моделирование КК взаимодействия

Потребуем, чтобы начальная конфигурация минимизировала функционал:

$$\begin{cases} S[\varphi(x)] = |\varphi''(x) - dV/d\varphi|^2, \\ \varphi(-A) = \varphi(A) = \varphi^{(0)} \text{ (фиксация положений К и } \bar{K}) \end{cases} \quad (16)$$

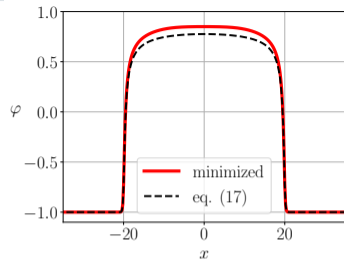
Использовался метод градиентного спуска с нулевым приближением:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} [\varphi_K(x + A) + 1] [\varphi_{\bar{K}}(x - A) + 1] - 1 \quad (17)$$

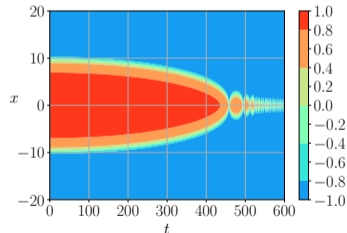
Конечно-разностная аппроксимация уравнения движения:

$$\frac{\varphi_p^{m+1} - 2\varphi_p^m + \varphi_p^{m-1}}{h_t^2} = \frac{\varphi_{p+1}^m - 2\varphi_p^m + \varphi_{p-1}^m}{h_x^2} - \frac{dV}{d\varphi}(\varphi_p^m) \quad (18)$$

Шаги по времени и пространству: $h_t = 0.01$, $h_x = 0.1$



(а) Построение начального условия



(b) Динамика КК ($n = 2$)

Рис. 3: Решение уравнения движения

Численная оценка силы взаимодействия

Сила оценивалась как

$$F = M_K \cdot (a \pm \Delta a), \quad a = \frac{2s}{t_s^2}, \quad (19)$$

$$\Delta a = \sqrt{\left(\frac{\partial a}{\partial s}\right)^2 h_x^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial t}\right)^2 h_t^2} \quad (20)$$

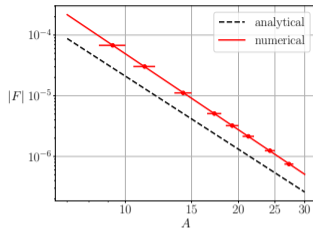
Аналитическая оценка дает силу в следующем виде

$$F_n(A) = -\frac{C_n}{A^{m_n}} \quad (21)$$

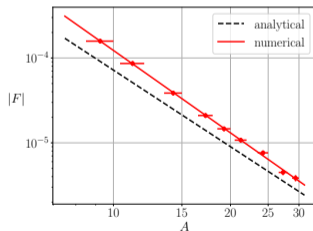
Для оценки коэффициентов C_n, m_n

$$\ln |F_n(A)| = \ln(C_n) - m_n \cdot \ln A \quad (y = b - k \cdot x) \quad (22)$$

Параметр	Аналитика	Численная оценка
C_2	0.21	0.71, [0.62, 0.82]
m_2	4	4.16 ± 0.05
C_3	0.072	0.208, [0.189, 0.231]
m_3	3	3.23 ± 0.04



$$n = 2 \\ F_{\text{pow}} \approx -\frac{0.21}{A^4}$$



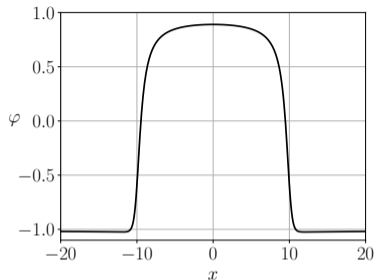
$$n = 3 \\ F_{\text{pow}} \approx -\frac{0.072}{A^3}$$

- Аналитически оценена сила взаимодействия в случае, когда K и \bar{K} обращены друг к другу степенными асимптотиками.
- Применен алгоритм получения начальной $K\bar{K}$ конфигурации, позволяющий работать с кинками, имеющими медленные (степенные) асимптотики.
- Получены численные оценки силы взаимодействия между K и \bar{K} .
- Численные результаты хорошо согласуются с асимптотическими оценками.
- Планируется применить разработанные методы к другим моделям с дальнодействием между K и \bar{K} .

Спасибо за внимание!

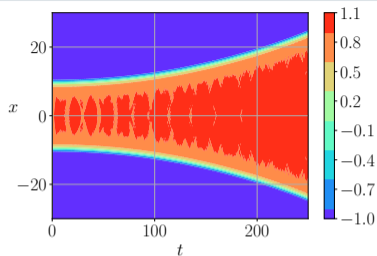
Докладчик: Екатерина Белендрясова,
инженер ИБРАЭ РАН
rilone75@gmail.com,
bel.eg@ibrae.ac.ru

Дополнительно: эволюция $K + \bar{K} - 1$

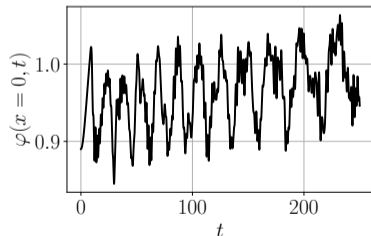


Использование суммы $K + \bar{K} - 1$

приводит к большим колебаниям системы в самом начале движения, и отталкиванию за счет этих колебаний



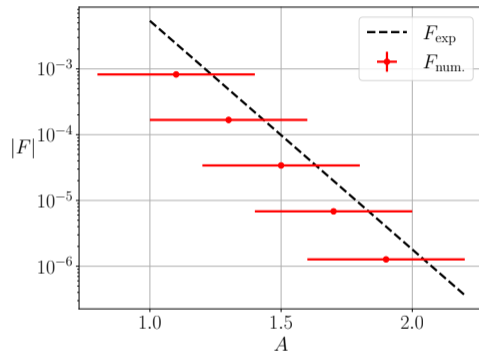
(a) отталкивание вместо притяжения



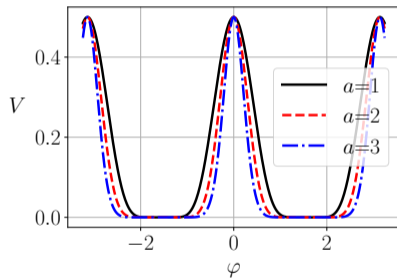
(b) колебания поля при $x = 0$

Рис. 4: Динамика $K\bar{K}$ при использовании н.у. в виде суммы

Экспоненциальные асимптотики "не чувствуют" друг друга даже на малых полурасстояниях < 3



$$V = \frac{1}{2} \cos^4(\varphi) \operatorname{sech}^2[a \cdot \tan(\varphi)] \quad (23)$$



$$\varphi_K = \arctan \left[\frac{\operatorname{arcsinh}(a(x - x_0))}{a} \right] \quad (24)$$

