Спиновая геометрия пространства-времени в теории Дирака

Ю.Н. Обухов
(ИБРАЭ РАН)

Сессия-конференция секции ядерной физики ОФН РАН,
посвященная 70-летию В.А. Рубакова
Москва, 21 февраля 2025

(по результатам совместной работы с Г.Е. Воловиком)

План

Эйнштейн: метрика = геометрия пространства-времени.
В современной ОТО $g^{\mu\nu}$ не фундаментальна: Гравитация входит в уравнение Дирака через тетрады: 4×4 матрицы e_a^μ, - первичный объект. Метрика = билинейная комбинация тетрад. Индекс μ - координаты пространства-времени, индекс a - внутреннее спиновое $SO(1,3)$ пространство.
Сочетание ОТО и Стандартной модели: группы симметрий $SO(1,7)$, $SO(3,11)$, алгебра Клиффорда $Cl(0,6)$, высшие спины. Размерность n внутр. пространства $\neq$ размерности D пространства-времени $\Longrightarrow$ описание гравитации с помощью прямоугольного $D \times n$ репера с $n \neq D$.
Компоненты репера не связаны с осями системы координат: eg возникающие поля в теории Акамы-Дьяконова-Веттериха и сверхтекучий ^{3}He в B-фазе, где динамический репер есть билинейная комбинация фермионных полей. Размерность n спинового пространства может быть больше размерности D координатного пространства.

Геометрическая структура пространства-времени

- Краткий курс дифференциальной геометрии в гравитации
- Пространство-время = гладкое $D = 4$ многообразие $\{x^\mu\}$
- Локальный репер $e^\alpha_\mu(x)$ реализует систему отсчета физического наблюдателя (лабораторию в точке x)
- Метрика $g_{\mu\nu}(x)$ задает скалярное произведение = (длины и углы) $\Longrightarrow$ линейный элемент $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$
- Связность $\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu}(x)$ определяет параллельный перенос геометрических объектов; обеспечивает ковариантность
- Аффинно-метрическая геометрия пространства $(g_{\mu\nu}, \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu})$ характеризуется кривизной, кручением, неметричностью:

$$\begin{aligned} R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} &= \partial_\mu\Gamma^\alpha{}_{\beta\nu} - \partial_\nu\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu} + \Gamma^\alpha{}_{\lambda\mu}\Gamma^\lambda{}_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\lambda\nu}\Gamma^\lambda{}_{\beta\mu}, \\ T^\alpha{}_{\mu\nu} &= \Gamma^\alpha{}_{\nu\mu} - \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}, \\ Q_{\lambda\mu\nu} &= -\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = -\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \Gamma^\sigma{}_{\mu\lambda}g_{\sigma\nu} + \Gamma^\sigma{}_{\nu\lambda}g_{\mu\sigma} \end{aligned}$$

- В эйнштейновской ОТО: $T^\alpha{}_{\mu\nu} = 0$ и $Q_{\lambda\mu\nu} = 0$

Квинтет 4×4-матриц Дирака Γ^a с $a = 0, 1, 2, 3, 4$,

$$\{\Gamma^a, \Gamma^b\} = 2\eta^{ab}\,, \qquad \eta^{ab} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1, -1)\,,$$

можно ввести в терминах обычных 4×4 γ-матриц Дирака:

$$\begin{aligned} \Gamma^0 &:= \gamma^0 = \tau_1 \qquad (a = 0)\,, \quad \Gamma^a := \gamma^a = i\tau_2\sigma^a \ \ (a = 1, 2, 3)\,, \\ \Gamma^4 &:= -i\gamma_5 = i\tau_3 \ \ (a = 4)\,, \quad \frac{1}{5!}\varepsilon_{abcde}\Gamma^a\Gamma^b\Gamma^c\Gamma^d\Gamma^e = 1 \end{aligned}$$

Здесь ε_{abcde} — пятимерный тензор Леви-Чивиты; $\varepsilon_{01234} = +1$. Введем 4×5 репер e^μ_a и из 5-вектора Γ^a в спин.пространстве, построим 4×4 матрицы Дирака $\gamma^\mu(x) = e^\mu_a(x)\Gamma^a$ (4-вектор)

Обобщенное уравнение Дирака

$$(ie^\mu_a\Gamma^a\nabla_\mu - M)\,\psi = 0$$

ковариантно относительно диффеоморфизмов, $x \longrightarrow x(x')$, и локальных $SO(1,4)$ спиновых преобразований:

$$e^\mu_a \longrightarrow e^\mu_b\Lambda^b{}_a, \quad \psi \longrightarrow U^{-1}\psi, \quad U^{-1}\Gamma^a U = \Lambda^a{}_b\Gamma^b.$$

Уравнение фермионной частицы на основе 5-репера

Ортогональные 5×5 матрицы $\Lambda^a{}_b(x)$ (т.е. $\Lambda^a{}_c \Lambda^b{}_d \eta^{cd} = \eta^{ab}$) порождают $SO(1,4)$ спин-преобразования $U(x)$ генераторами

$$S^{ab} = \frac{i}{4}[\Gamma^a, \Gamma^b]\,.$$

Последние определяют спин-ковариантные производные

$$\nabla_\mu \psi = \partial_\mu \psi + \omega_\mu \psi, \qquad \omega_\mu = \frac{i}{2}\omega_{ab\mu} S^{ab}$$

в терминах спиновой связности $\omega_{ab\mu} = -\,\omega_{ba\mu}$.

Основные алгебраические соотношения формализма:

$$\begin{aligned}
\left[\Gamma^a, S^{bc}\right] &= i\left(\eta^{ab}\Gamma^c - \eta^{ac}\Gamma^b\right), \quad \left\{\Gamma^a, S^{bc}\right\} = \varepsilon^{abcde}\, S_{de},\\
\left[S^{ab}, S^{cd}\right] &= i(-\,S^{ac}\eta^{bd} + S^{ad}\eta^{bc} + \,S^{bc}\eta^{ad} - \,S^{bd}\eta^{ac}),\\
\left\{S^{ab}, S^{cd}\right\} &= \frac{1}{2}\left(\eta^{ac}\eta^{bd} - \eta^{ad}\eta^{bc} + \varepsilon^{abcde}\,\Gamma_e\right).
\end{aligned}$$

Индуцированная геометрия пространства-времени

Спиновая $SO(1,4)$ структура = 5-репер + спин-связность

$$(e^{\mu}_{a}, \quad \omega^{a}{}_{b\mu})$$

Вычисляя коммутатор ковариантных производных,

$$(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu)\,\psi = \frac{i}{2}\Omega_{ab\mu\nu}S^{ab}\psi,$$

выводим напряженность поля, или спиновую кривизну:

$$\Omega^{a}{}_{b\mu\nu} = \partial_\mu \omega^{a}{}_{b\nu} - \partial_\nu \omega^{a}{}_{b\mu} + \omega^{a}{}_{c\mu}\omega^{c}{}_{b\nu} - \omega^{a}{}_{c\nu}\omega^{c}{}_{b\mu},$$

Традиционная метрика $D = 4$ пространства-времени выражается через 4×5 репер e^{μ}_{a} так же, как в ОТО:

$$g^{\mu\nu} = e^{\mu}_{a} e^{\nu}_{b} \eta^{ab}.$$

При условии невырожденности (т. е. $\det g^{\mu\nu} \neq 0$), можем построить обратное тензорное поле $g_{\mu\nu}$.

Поскольку прямоугольный репер связывает 4- и 5-мерные пространства, матрица e^μ_a не может иметь обратной. Однако, можно ввести 5×4 матричный объект

$$e^a_\mu := \eta^{ab} g_{\mu\nu} e^\nu_b,$$

который является полуобратным исходному реперу, т. е.

$$e^a_\mu e^\nu_a = \delta^\nu_\mu, \qquad e^a_\mu e^\mu_b = \Pi^a{}_b \neq \delta^a_b$$

Из определения находим, что это идемпотентный объект (следовательно, проектор),

$$\Pi^a{}_c \Pi^c{}_b = \Pi^a{}_b.$$

В общем случае он зависит от пространственно-временных координат, $\Pi^a{}_b = \Pi^a{}_b(x)$.

Полуобратная матрица определяет спиновое кручение:

$$\Theta^a{}_{\mu\nu} = \partial_\mu e^a_\nu - \partial_\nu e^a_\mu + \omega^a{}_{b\mu} e^b_\nu - \omega^a{}_{b\nu} e^b_\mu \,.$$

Вместе со спиновой кривизной они играют роль обобщенных структурных соотношений. Постулируем

$$\nabla_\mu e^\nu_a = \partial_\mu e^\nu_a + \Gamma^\nu{}_{\lambda\mu} e^\lambda_a - \omega^b{}_{a\mu} e^\nu_b = 0.$$

Нельзя решить это уравнение относительно спин-связности $\omega^b{}_{a\mu}$. Однако с помощью полуобратной матрицы e^a_μ находим:

$$\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu} = e^\alpha_a \omega^a{}_{b\mu} e^b_\beta + e^\alpha_a \partial_\mu e^a_\beta .$$

Спин структура индуцирует геометрию пространства-времени

$$(e^\mu_a, \quad \omega^a{}_{b\mu}) \quad \Longrightarrow \quad (g^{\mu\nu}, \quad \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu})$$

Свойства индуцированной геометрии

Многообразие с $\{g^{\mu\nu}, \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu}\}$, характеризуется кривизной, кручением и неметричностью. Дифференцируя $\nabla_{\mu} e_{a}^{\nu} = 0$, найдем кривизну

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\lambda\mu}\Gamma^{\lambda}{}_{\beta\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\lambda\nu}\Gamma^{\lambda}{}_{\beta\mu} = \Omega^{a}{}_{b\mu\nu} e_{a}^{\alpha} e_{\beta}^{b}$$

Путем свертки выводим тензор Риччи и скаляр кривизны:

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu} = e_{a}^{\lambda} e_{\beta}^{b}\, \Omega^{a}{}_{b\lambda\nu}, \qquad R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = e_{a}^{\mu} e_{b}^{\nu}\, \Omega^{ab}{}_{\mu\nu}.$$

Связность $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu}$ совместима с метрикой:

$$\nabla_{\mu} g^{\alpha\beta} = \partial_{\mu} g^{\alpha\beta} + \Gamma^{\alpha}{}_{\lambda\mu} g^{\lambda\beta} + \Gamma^{\beta}{}_{\lambda\mu} g^{\alpha\lambda} = 0.$$

Индуцированная геометрия имеет нулевую неметричность. Однако индуцированное кручение пространства-времени

$$T^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\mu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} = e_{a}^{\alpha} \Theta^{a}{}_{\mu\nu}.$$

может быть нетривиальным, в общем случае.

Тонкая структура прямоугольного репера

С формальной точки зрения прямоугольная матрица репера

$$e_a^\mu = \left(\begin{array}{cccc|c} e_0^0 & e_1^0 & e_2^0 & e_3^0 & e_4^0 \\ e_0^1 & e_1^1 & e_2^1 & e_3^1 & e_4^1 \\ e_0^2 & e_1^2 & e_2^2 & e_3^2 & e_4^2 \\ e_0^3 & e_1^3 & e_2^3 & e_3^3 & e_4^3 \end{array}\right),$$

и естественно разбить её на квадратный 4×4 блок e_α^μ (с $\alpha = 0, 1, 2, 3$) и столбец $k^\mu := e_4^\mu$ трактовать как 4-вектор. В представлении $e_a^\mu = \{e_\alpha^\mu, k^\mu\}$, уравнение Дирака перейдет в

$$(i e_\alpha^\mu \gamma^\alpha \nabla_\mu + \gamma_5 k^\mu \nabla_\mu - M)\, \psi = 0\,.$$

Это частный случай расширения стандартной модели (SME); k^μ являет эффекты нарушения Лоренца (Kostelecky, 1997). Тогда индуцированная метрика

$$g^{\mu\nu} = \overset{(0)}{g}{}^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu,$$

где $\overset{(0)}{g}{}^{\mu\nu} = e_\alpha^\mu e_\beta^\nu \eta^{\alpha\beta}$. Это обобщенный анзац Керра-Шильда!

Пространство-время де Ситтера и группа де Ситтера

Прямоугольный 4 × 5 репер возникает для пространства де Ситтера как $(1+3)$-гиперповерхности в $(1+4)$-мерном пространстве-времени Минковского $ds^2 = \eta_{ab} d\mathcal{X}^a d\mathcal{X}^b$.
Пространство-время де Ситтера $\Sigma_{1,3}$ = гиперболоид

$$\eta_{ab}\mathcal{X}^a\mathcal{X}^b = -\,\ell^2.$$

Вложение опишем в параметрической форме
$\mathcal{X}^0 = \ell\, f(r)\,\mathbb{S}(t),\ \mathcal{X}^4 = \ell\, f(r), \quad \mathcal{X}^1 = x, \quad \mathcal{X}^2 = y, \quad \mathcal{X}^3 = z,$

где $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $f = \sqrt{1 - \frac{r^2}{\ell^2}}$, $\mathbb{C} = \cosh(t/\ell)$, $\mathbb{S} = \sinh(t/\ell)$
На $\Sigma_{1,3}$ индуцируется метрика $g_{\mu\nu} = e^a_\mu e^b_\nu \eta_{ab}$ посредством

$$e^a_\mu = \frac{\partial\mathcal{X}^a}{\partial x^\mu} = \begin{pmatrix} f\mathbb{C} & -\frac{x\,\mathbb{S}}{\ell\, f} & -\frac{y\,\mathbb{S}}{\ell\, f} & -\frac{z\,\mathbb{S}}{\ell\, f} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ f\mathbb{S} & -\frac{x\,\mathbb{C}}{\ell\, f} & -\frac{y\,\mathbb{C}}{\ell\, f} & -\frac{z\,\mathbb{C}}{\ell\, f} \end{pmatrix}.$$

Результирующая индуцированная метрика

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} f^2 & 0 \\ 0 & -\delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{\ell^2 f^2} \end{pmatrix}, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

описывает $\Sigma_{1,3}$ как однородное 4-мерное пространство-время постоянной кривизны $R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = \frac{1}{\ell^2}\left(\delta^{\alpha}_{\nu} g_{\beta\mu} - \delta^{\alpha}_{\mu} g_{\beta\nu}\right)$. Заменяя декартовы координаты (x, y, z) на сферические (r, θ, ϕ):

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r^2}{\ell^2}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{\ell^2}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2).$$

Дирак [P.A.M. Dirac, Ann. Math. **36** (1935) 657] предложил волновое уравнение для частицы спина $\frac{1}{2}$ в пространстве де Ситтера; Гюрши и Ли [F. Gürsey, T.D. Lee, PNAS **49** (1963) 179] переоткрыли эту обобщенную теорию на базе 5-мерной алгебры Клиффорда матриц Дирака.

Выводы

Полученное обобщенное уравнение Дирака предполагает нетривиальное расширение группы Лоренца $SO(1,3)$ до спиновой группы де Ситтера $SO(1,4)$, вводя прямоугольный 4×5 репер e_a^μ в качестве новой геометрической переменной вместе со спиновой связностью $\omega^a{}_{b\mu}$ (ковариантность!)

Новые фундаментальные спиновые переменные $\{e_a^\mu, \omega^a{}_{b\mu}\}$ индуцируют геометрическую структуру на пространстве-времени, определяя метрику $g^{\mu\nu}$ и линейную связность $\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu}$.

Индуцированная геометрия пространства-времени Римана-Картана характеризуется нулевой неметричностью, однако нетривиальные кривизна и кручение пространства-времени строятся из спиновой кривизны и спинового кручения.

Yu.N. Obukhov, G.E. Volovik, Phys. Rev. D **109** (2024) 064076