



I. N. Borzov 1,2

1 National Research Centre "Kurchatov Institute", Moscow, Russia

2 Bogolubov Laboratory of Theoretical Physics JINR, Dubna



Charge radii and β -decay properties of nuclei near magic neutron shell N=126

Precision laser spectroscopy of the hyper-fine splitting spectra and beta-decay measurements of exotic nuclei at RIB facilities have reached a new level nowadays.

The nuclear charge radii and beta-decay half-lives near N=126 (important for the r-process) have been intensively explored recently at CERN, GSI etc...

This calls for theoretical studies of different nuclear observables $\langle r^2 \rangle$, Q_2 , μ and $T_{1/2}$ beta-decay of exotic very neutron-rich nuclei in a single self-consistent framework.

Motivation

The self-consistent FFST with modified Fayans functional DF3-a is used for **simultaneous description of the isotopic dependence of the radii (R_{charge}) and β decay half-lives**.

The isotopic behavior of the **R_{charges}** is sensitive to the spin-parity of the shell orbit occupied by the valence neutron. The **β decay half-lives** are sensitive to the ordering of neutron orbitals due to the GT and FF decays competitions!

By definition the Fayans functionals complies with experimental single-particle spectra.

For $N=126$ region, the reference nucleus is ^{208}Pb : $\Delta\epsilon (n_{2g9/2} - n_{1i11/2}) = -780 \text{ keV}$

Relativistic Hartree-Bogoliubov (RHB) with covariant EDFs gives an inversed order of the neutron states at $N > 126$!

How this difference may influence the simultaneous description of R_{charge} and $T_{1/2}$

Fayans functional DF3-a. Self-Consistent Ground State.

$$E[\rho, \nu] = \text{Tr} \left(\frac{p^2}{2M} \rho \right) + E_{\text{int}}[\rho, \nu]$$

Kohn – Sham quasiparticle local EDF, $M^* = 1$

$$E_{\text{int}} = \sum_{\text{main, Coul, sl}} \varepsilon_n[\rho] + \frac{1}{2} \nu^* F^\xi[\rho] \nu$$

F^ξ – volume + surface

$$\mathcal{E}(\rho) = \frac{a\rho^2}{2} \frac{1 + \alpha\rho^\sigma}{1 + \gamma\rho}.$$

$$f^\xi(x_+(\mathbf{r})) = f_{\text{ex}}^\xi + h^\xi(x_+)^q(\mathbf{r}) + f_{\nabla}^\xi r_0^2 (\nabla x_+(\mathbf{r}))^2.$$

$$H = \begin{pmatrix} h - \mu & -\Delta \\ -\Delta & \mu - h \end{pmatrix}$$

$$h = \frac{p^2}{2m} + \frac{\delta E}{\delta \rho} \sim \rho \quad \Delta = \frac{\delta E_{\text{int}}}{\delta \nu}$$

HFB – like iterative procedure

$$\rho_0, \nu_0 \Rightarrow h_0, \Delta_0 \Rightarrow \rho_1, \nu_1 \Rightarrow h_1, \Delta_1$$

Functional by S.A. Fayans

S.A. Fayans, S.V. Tolokonnikov, E. Trykov, D. Zawischa, Nucl. Phys. A676.

I.N. Borzov, S.A. Fayans, E. Kromer, D. Zawischa Z. Phys. A335(1996) 117.

Fitted to the nuclear masses, matter densities, s.p energies of magic nuclei.

Fayans functional family - DF3, FANF⁰, DF3- α , DF3-f....

A. V. Smirnov, S. V. Tolokonnikov, and S. A. Fayans, *Sov. J. Nucl. Phys.* **48**, 995 (1988). (DF1)

S.A. Fayans, S.V. Tolokonnikov, E. Trykov, D. Zawischa, *Nucl. Phys.* **A676** (2000) 49. (DF3)

I.N. Borzov, S.A. Fayans, E. Kromer, D. Zawischa *Z. Phys.* **A335** 117 (1996) . (DF3)

S.A. Fayans, *JETP Lett.* **68**, 169 (1998). (FANDF⁰)

S. V. Tolokonnikov and E. E. Saperstein, *Phys. At. Nucl.* **73**, 1684 (2010). (DF3 - α)

I.N. Borzov, S. V. Tolokonnikov, *Phys. At. Nucl.* **82**, 471 (2019) . (DF3 - f)

K. Minamisono, *W. Nazarewicz*, W. Nörtershäuser, E. Olsen, M. R. Pearson,
P.-G. Reinhard, E. E. Saperstein, and S. V. Tolokonnikov, et.al.
Phys. Rev. Lett. **117**, 252501 (2016). *Laser Spectroscopy of Neutron-Rich Fe Isotopes....*

“recently developed” **Fayans functional – F_y , ... F_y (Δr ; HFB)**

K. Minamisono, *W. Nazarewicz*, W. Nörtershäuser, E.Olsen, M. R. Pearson,
P.-G. Reinhard, *E. E. Saperstein*, and *S. V. Tolokonnikov*, et.al.

*Phys. Rev. Lett.*117, 252501 (2016). *Laser Spectroscopy of Neutron-Rich Fe Isotopes....*

P.-G. Reinhard and W. Nazarewicz, *Phys. Rev. C* 95, 064328 (2017).

Toward a global description of nuclear charge radii: Exploring the Fayans energy density functional

- R. F. Garcia Ruiz *P.-G. Reinhard and W. Nazarewicz*.... et al., [Nature Physics](#), 12, 594 (2016).

Unexpectedly large charge radii of neutron-rich calcium isotopes

- *W.Nazarewicz* et.al , [Nature Physics](#) 15, 432 (2019);
- R.de Groot et al., [Nature Physics](#) 16, 620(2020) *Laser Spectroscopy of Neutron-Rich Cu isotopes.*
- A. J. Miller, et.al ,*Phys. Rev. Lett.*, 122, 192502 (2019) *Laser Spectroscopy of Neutron-Rich Tin Isotopes.*
- A.Koszorús et.al., [Nature Letters](#) doi.org/10.1038/s41567-020-01136-5
- *Radii of exotic potassium isotopes: challenge for nuclear theory and the magic character of $N = 32$.*

..... and more

I. Nuclear charge radii. Odd-even staggering. Kink of the isotopic curves at N=126

$$\langle r_{\text{ch}}^2 \rangle = \frac{1}{Z} \int r^2 \rho_{\text{ch}}(\mathbf{r}) d^3 r.$$

rms charge density

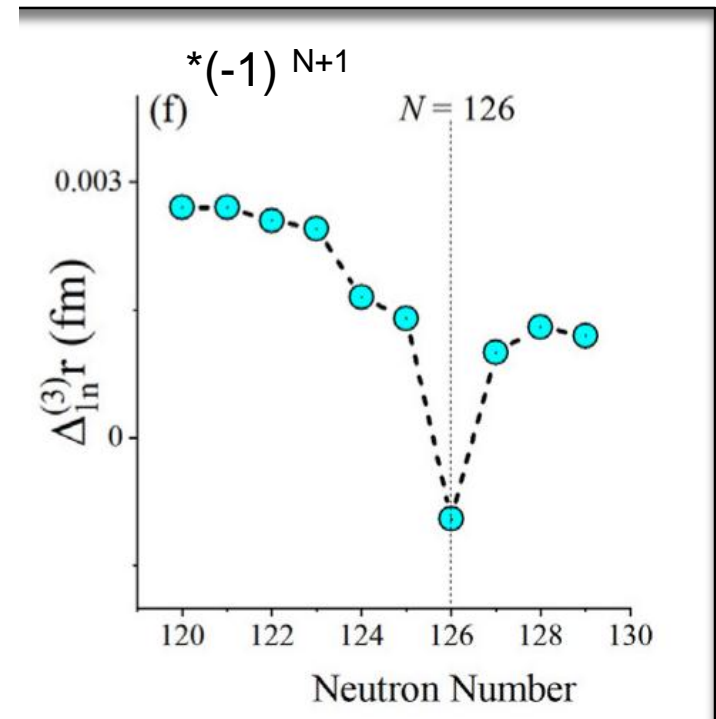
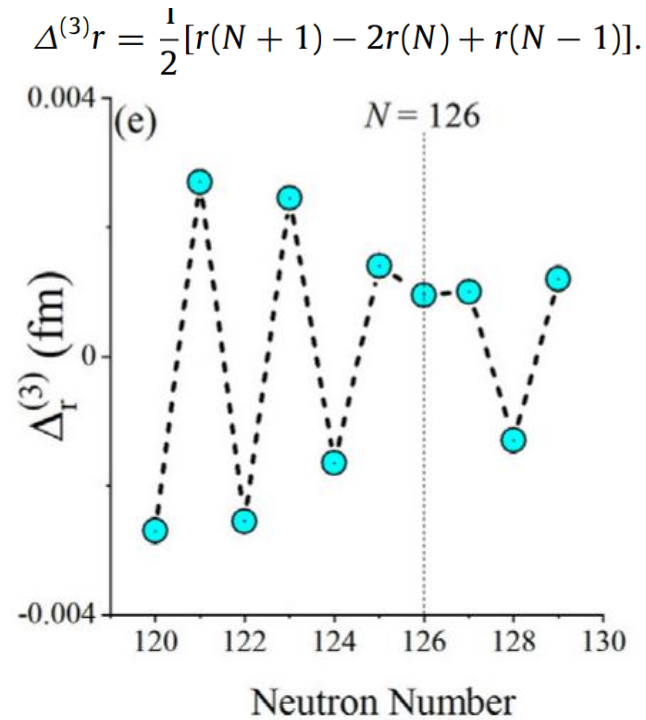
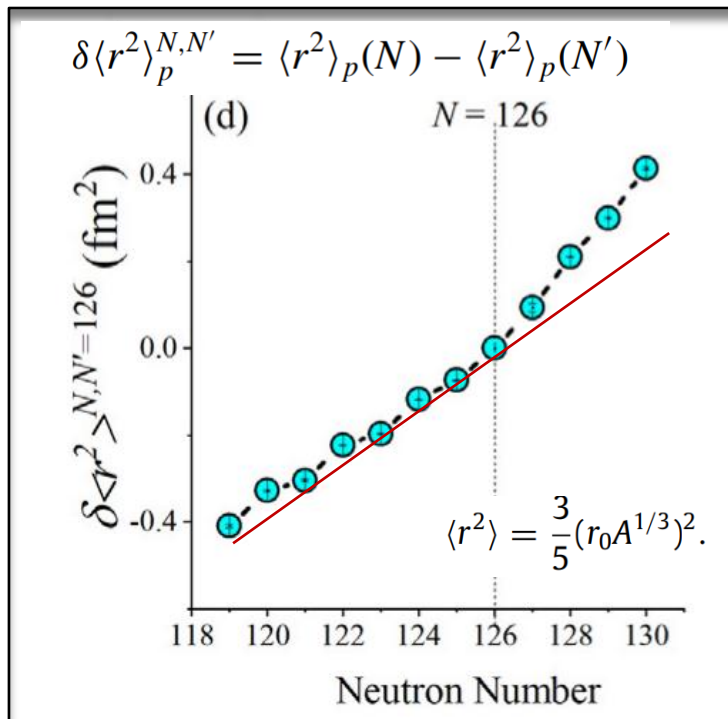
$$\rho_{\tau}(\mathbf{r}) = \sum_{jls} n_{\lambda}^{\tau} \phi_{\lambda}^{\tau}(\mathbf{r})$$

point-like densities ρ_{τ}

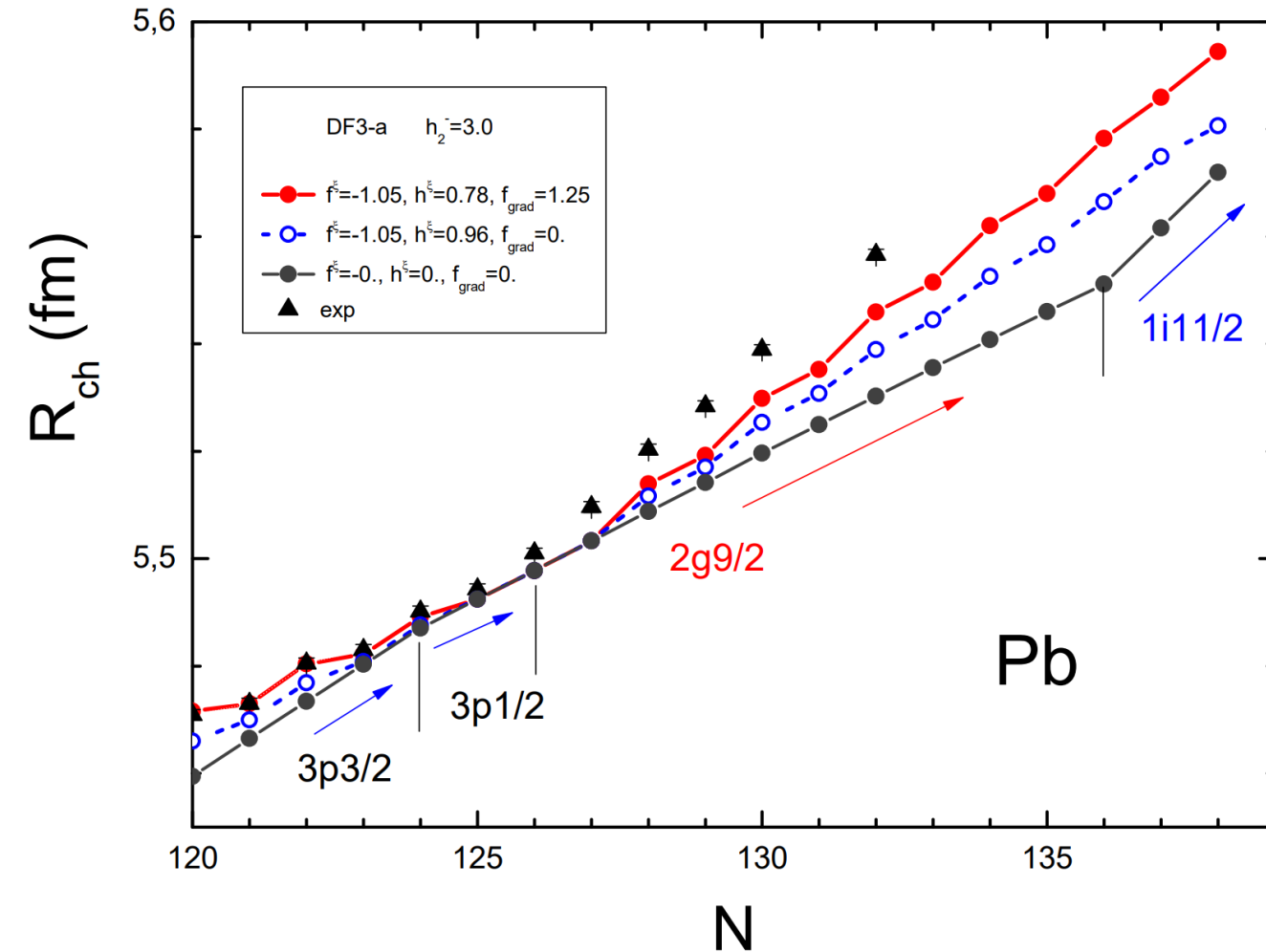
$$\langle r_{\text{ch}}^2 \rangle = \langle r_p^2 \rangle + \langle \delta r_{\text{ch}}^2 \rangle_p + N/Z \langle \delta r_{\text{ch}}^2 \rangle_n + \langle r_{s-o}^2 \rangle + \langle r_{\text{cm}}^2 \rangle,$$

Relativistic, spin-orbit, c.m. corrections

$$r_{\text{ch}} = \sqrt{\langle r^2 \rangle_p + 0.64 \text{ fm}},$$



DF3-a . Charge radii in Pb isotopes. The different pairing options.



- (V, S, ▽) (vol, surf, grad)
- (V, S, 0) (vol, surf, 0)
- (0, 0, 0) no pairing

! “no pairing” - no kink for 1g9/2
 A kind of “kink” is seen for 1i11/2 due to high $l = 6$

! For “no gradient” option kink is too small

Typical DF3-a accuracy

$R_{ch} (exp - theor) :$

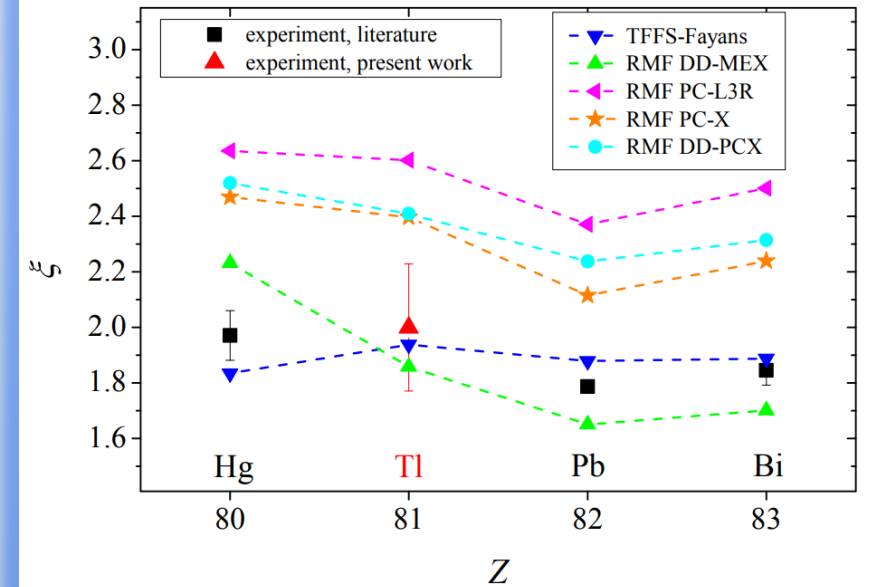
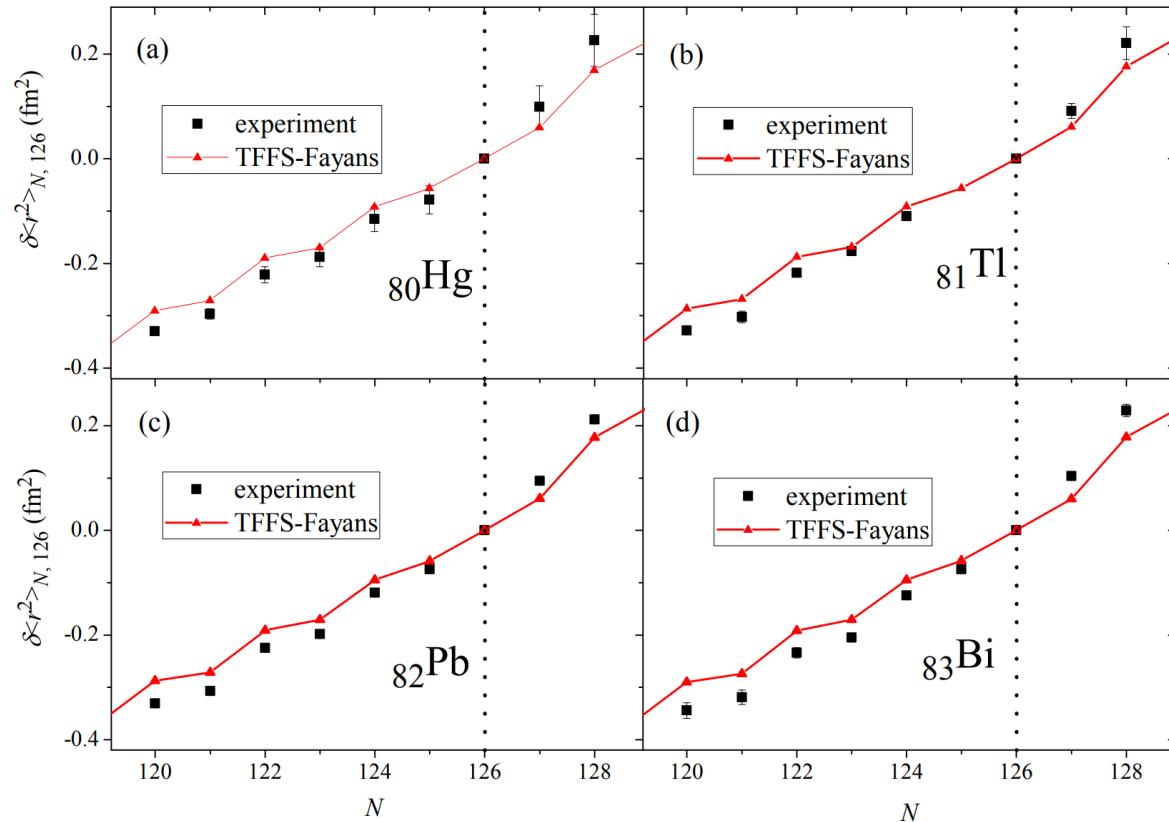
for $N=127$ it is $0.004 \text{ fm} = 0,07\%$

Electromagnetic moments and radii near $N=126$.

I.N.Borzov, S.V.Tolokonnikov, *Physics of Atomic Nuclei* 87, 423 (2024).

Kink in the charge radii at N=126

$$\xi = \delta\langle r^2 \rangle (128, 126) / \delta\langle r^2 \rangle (126, 124)$$



Charge radii of thallium isotopes in the vicinity of magic $N = 126$.

Z.Yue, A. N. Andreyev, A. E. Barzakh, I.N. Borzov, et.al. *Phys.Rev. C* **110**, 034315 (2024).

Electromagnetic moments and radii near $N=126$.

I.N.Borzov, S.V.Tolokonnikov, *Physics of Atomic Nuclei* **87**, 423 (2024).

Для ф-ла Фаянса индикаторы излома согласуются с экспериментальными данными

Известные RMF функционалы

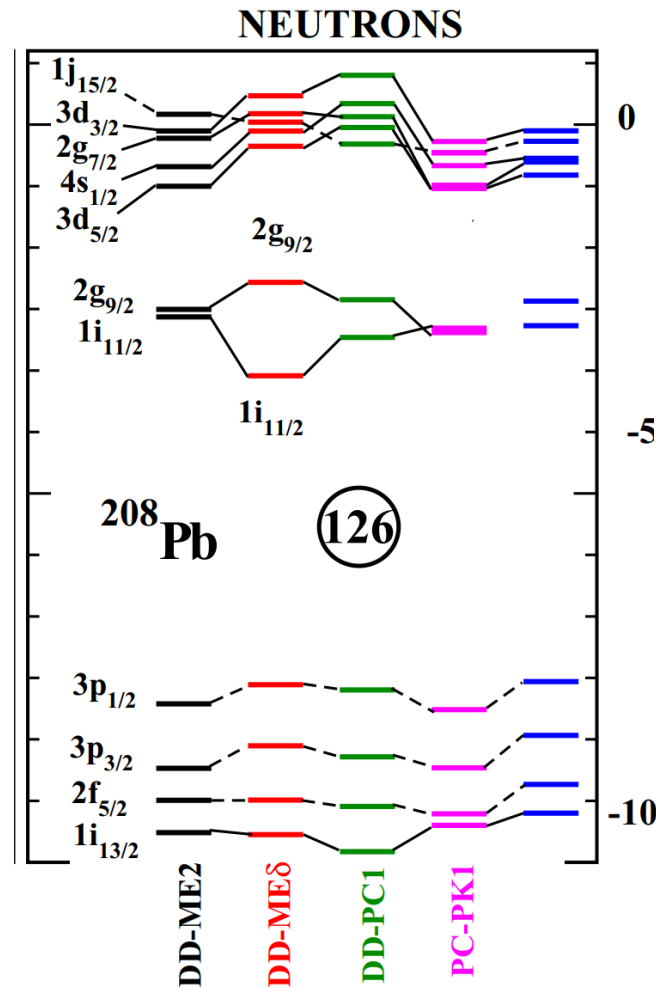
U. C. Perera et.al., *Phys.Rev. C* **104**, 064313 (2021)

либо завышают ξ ,
либо приводят к сильной Z-зависимости.

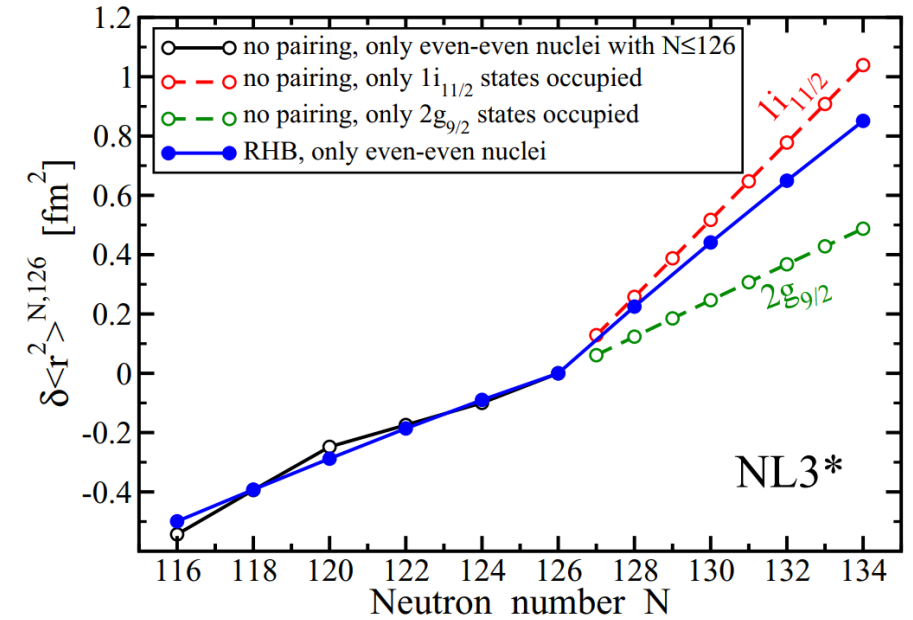
В релятивистских моделях (RMF) «излом» зарядовых радиусов при $N=126$ возникает за счет инверсии уровней $n2g_{9/2} - n1i_{11/2}$.
 На эксперименте нет инверсии - уровень $n2g_{9/2}$ ниже на 780 keV !

Experimental ^{208}Pb spectra

$\tau \ n \ l \ j$	$E_{\text{exp}}, \text{MeV}$	$E_{\text{DF3-a}}$
$n \ 1j \ 15/2$	-2.51	-2.60
$n \ 1i \ 11/2$	-3.16	-3.12
$n \ 2g \ 9/2$	-3.94	-3.66



PHYSICAL REVIEW C **104**, 064313 (2021)

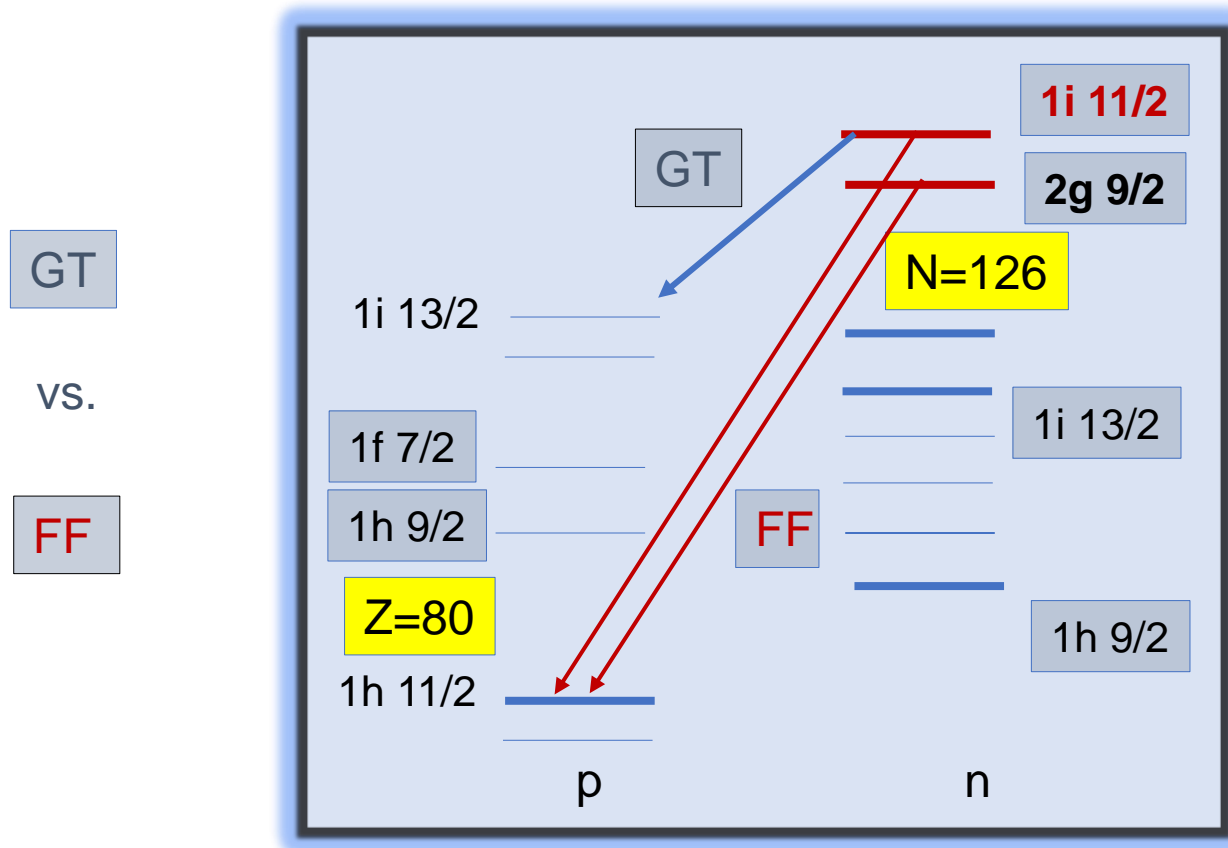


U. C. Perera, A. V. Afanasjev, and P. Ring.
 Charge radii in covariant density functional theory:
 A global view Phys.Rev. C **104**, 064313 (2021)

В расчетах RMF - инверсия уровней.
 При $N > 126$ первым заполняется $n1i_{11/2}$!
 Он дает основной вклад в $\langle \delta r^2 \rangle$
 и «организует» kink $\langle r^2(N) \rangle$
 даже без спаривания.

Nuclear beta-decay of Hg isotopes (... 2 proton holes at $Z = 82$!)

Конкуренция Гамов-Теллеровских и cross-shell переходов первого запрета при $N > 126$ → Чувствительность скорости бета-распада к энергиям, орбитальным квантовым числам и степени заполнения нейтронных уровней $2g_{9/2}$ и $1i_{11/2}$.



$$\lambda \sim T_{1/2}^{-1} \sim \omega_{FF}^5 < Q_{\beta}^5$$

$$\omega_{FF} \gg \omega_{GT}$$

$$B(GT^-) \sim |\langle p | M | n^{-1} \rangle|_{s.p.}^2 \sim$$

$$\sim (n_{\lambda}^{(n)} - (1 - n_{\lambda}^{(p)}) * 8l(l+1) / (2l+1))$$

При нормальном порядке заполнения при $N \geq 126$:

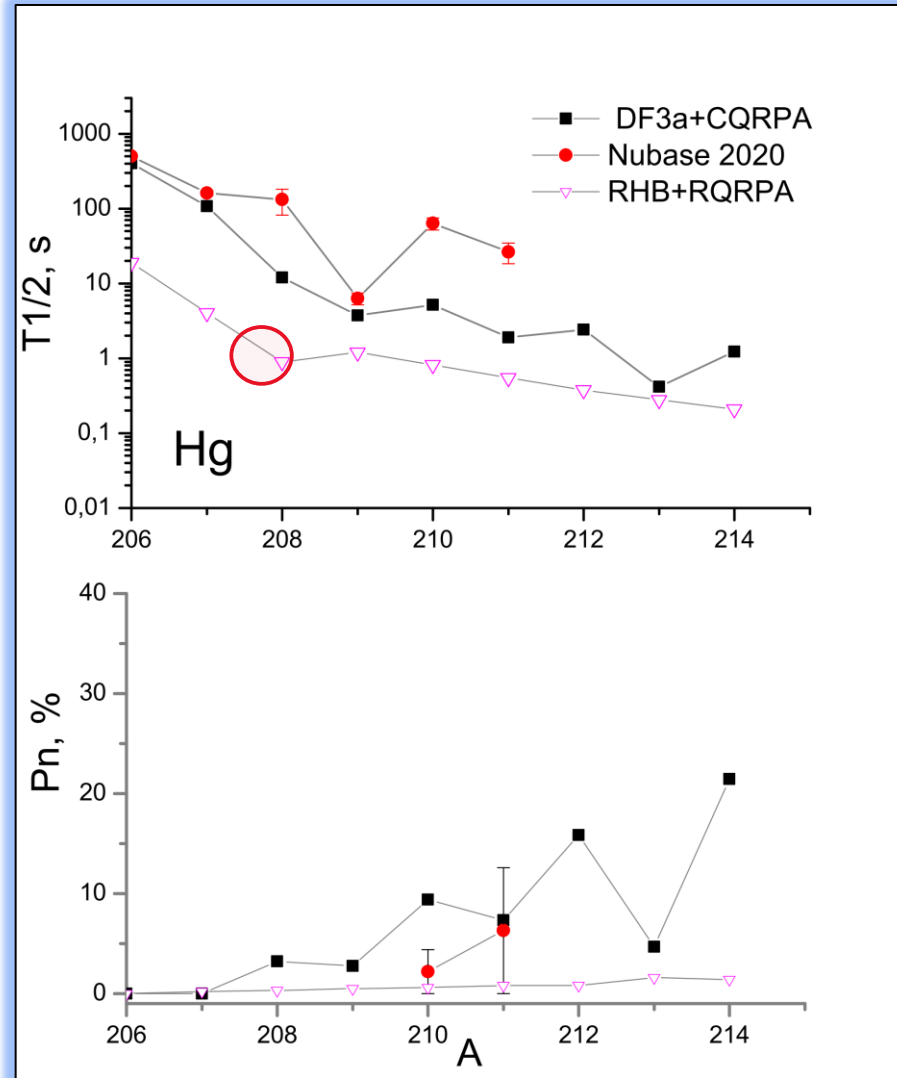
- существен вклад в $T_{1/2}$ **высокоэнергетических** FF переходов с $2g_{9/2}$ ($l = 4$).
- GT и FF переходы идут и с $1i_{11/2}$ за счет спаривания Орбитальный момент $l = 6$, но мал **фактор $n_{\lambda}^{(n)}$** .

Полная скорость β -распада λ существенно зависит от того какая из «конкурирующих» орбиталей заполняется первой при $N > 126$: **$2g_{9/2}$ ($l=4$) или $1i_{11/2}$ ($l=6$).**

Beta-decay half-lives and Pn-values for Hg isotopes. DF3-a (with no inversion) vs. RMF (with g-i inversion)

Isotope	$T_{1/2}$ Lanzhou	$T_{1/2}$ GSI	$T_{1/2}$ ISOLDE
^{208}Hg	$[(41)_{-4}^{+5}] \text{ min [1]}$	$132.2 \pm 50.0 \text{ s [3]}$	$135 \pm 10 \text{ s [4]}$
^{209}Hg	$[(35)_{-6}^{+9}] \text{ s [2]}$	$6.3 \pm 1.1 \text{ s [3]}$	-
^{210}Hg	-	-	-
^{211}Hg	-	-	-

CERN-ISOLDE
New exp. run for
A=209-211 Hg
in Oct.2024



DF3-a
 $T_{1/2}$ от 2 до 10 раз выше эксп.

NL3*
 $T_{1/2}$ до 100 раз ниже эксп.

Инверсия в RMF завышает вклад FF переходов, и ускоряет β -распад !

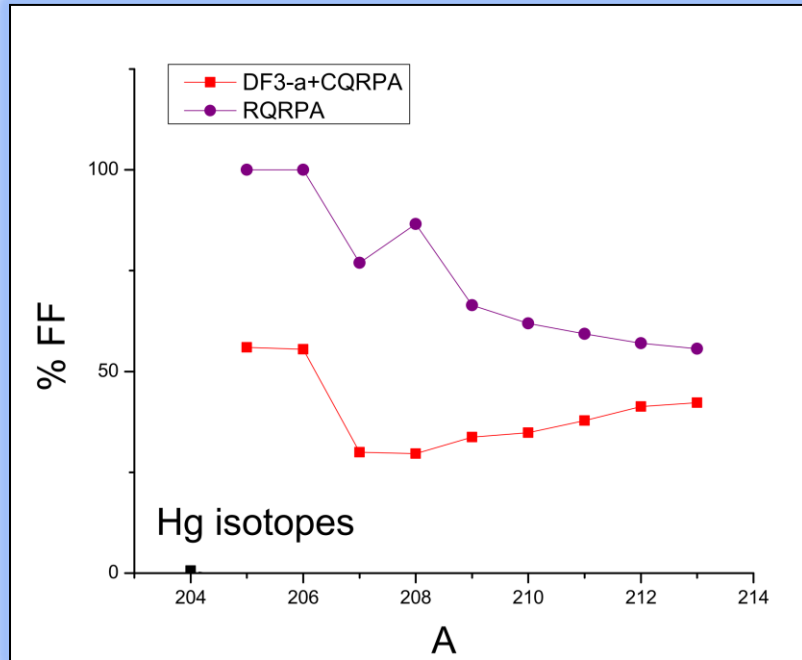
Marketin, L. Huther, G. Martínez-Pinedo. Phys. Rev. C 93, 025805, 2016

Включение в RMF связи с фононами (Particle Vibration Coupling) могло бы устранить инверсию, но (за счет смягчения силовой функции) привело бы к дальнейшему ускорению β -распада !

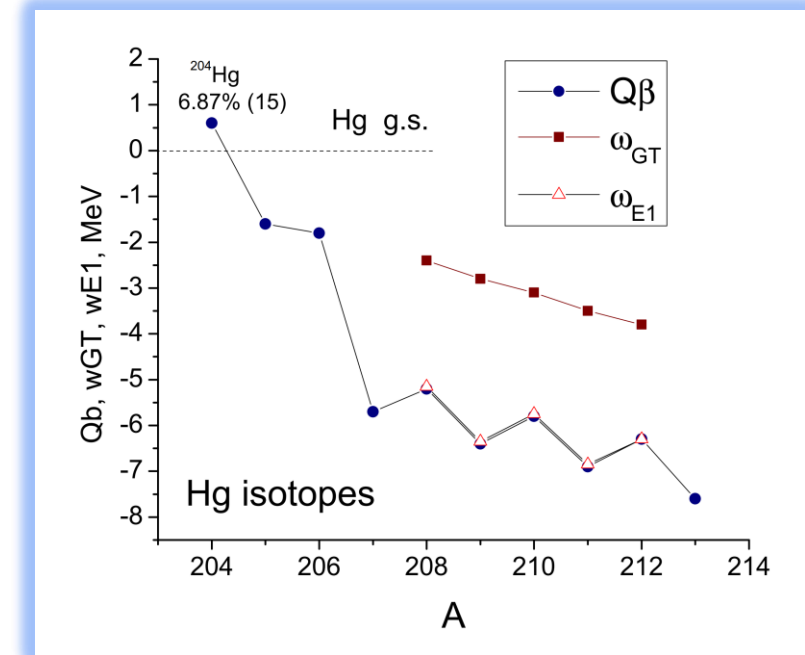
DF3-a. Energetics of ^{204}Hg and unstable $^{205-212}\text{Hg}$ isotopes

$$\lambda_{\text{total}} = \lambda_{\text{GT}} + \lambda_{\text{FF}}$$

$$\% \text{ FF} = 100 * \lambda_{\text{FF}} / \lambda_{\text{total}} = (T_{\text{GT}} - T_{\text{GT+FF}}) / T_{\text{GT}}$$



The energies with respect to the parent g.s.



A=205 -207.
DF3-a : $2g_{9/2} \rightarrow 1h_{11/2}$ %FF~50 – 30 %
NL3* : $1n_{i11/2} \rightarrow 1h_{11/2}$ %FF~100 -75%
RQRPA

DF3-a calculations give a stable ^{204}Hg .

The Gamow-Teller pygmy resonance enters the Q_{β} window at A=205 ($|Q_{\beta}| = 1.5$ MeV).

The energies of the FF (spin-dipole) transitions with $\Delta J=1$ and $\Delta J=0$ are close to the Q_{β} -values.

Самосогласованные FFST расчеты на основе функционала DF3-а для геометрических (R_{charge}), энергетических ($Q\beta$) свойств основных состояний, а также магнитных моментов ($\mu - CQRPA$, $\omega=0$) и бета-распада ($T_{1/2}$, $P_n - CQRPA$) тяжелых изотопов вблизи нейтронной оболочки $N=126$.

Для изотопов Hg индексы «изгиба» изотоп-зависимости зарядовых радиусов при пересечении магической оболочки $N=126$ достаточно хорошо описываются с функционалом DF3-а. Точность расчета такая же, как и в наших расчетах в изотопах Tl, Pb, Bi ($Z=81 - 83$).

Z. Yue, A. E. Barzakh, A. N. Andreev, I. N. Borzov, S.V.Tolokonnikov et.al.

PHYSICAL REVIEW C 110, 034315 (2024).

Рассчитанные с тем же функционалом DF3-а периоды полураспада изотопов Pt, Au, Hg, Tl, Pb, Bi, Po сравнены с компиляцией МАГАТЭ (2017) и NUBASE 2020.

В FFST с функционалом Фаянса DF3-а одновременно описываются эксп. одночастичные спектры, зарядовые радиусы и периоды бета-распада: $T_{1/2}$. Сравнение с RMF подходом – необходимость устранения «инверсии» в одночастичных спектрах...



Acknowledgments

A. E. Barzakh , A. N. Andreev

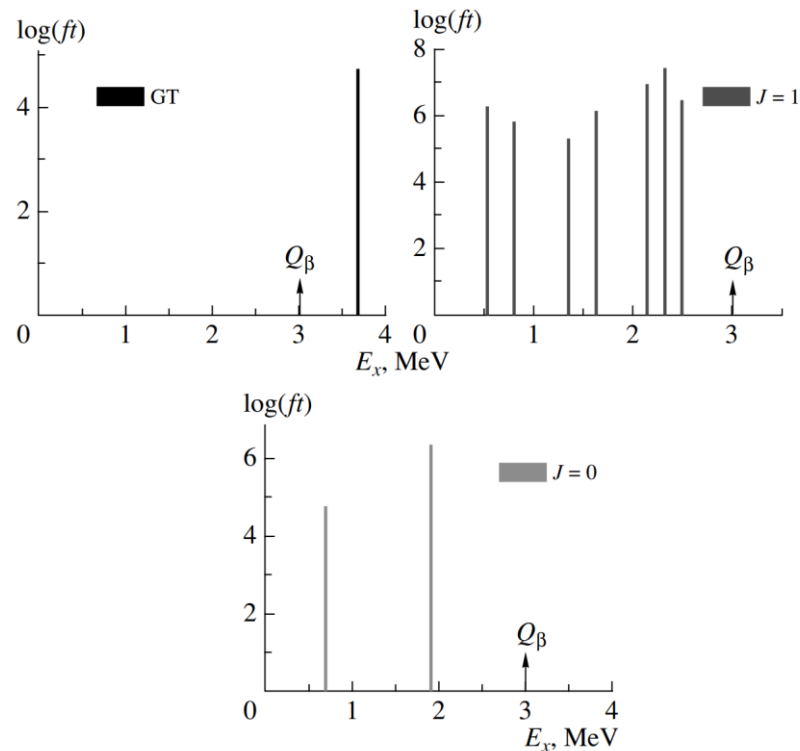
(For invitation to join and analyze their new CERN- experiments on Tl isotopes

S.V. Tolokonnikov

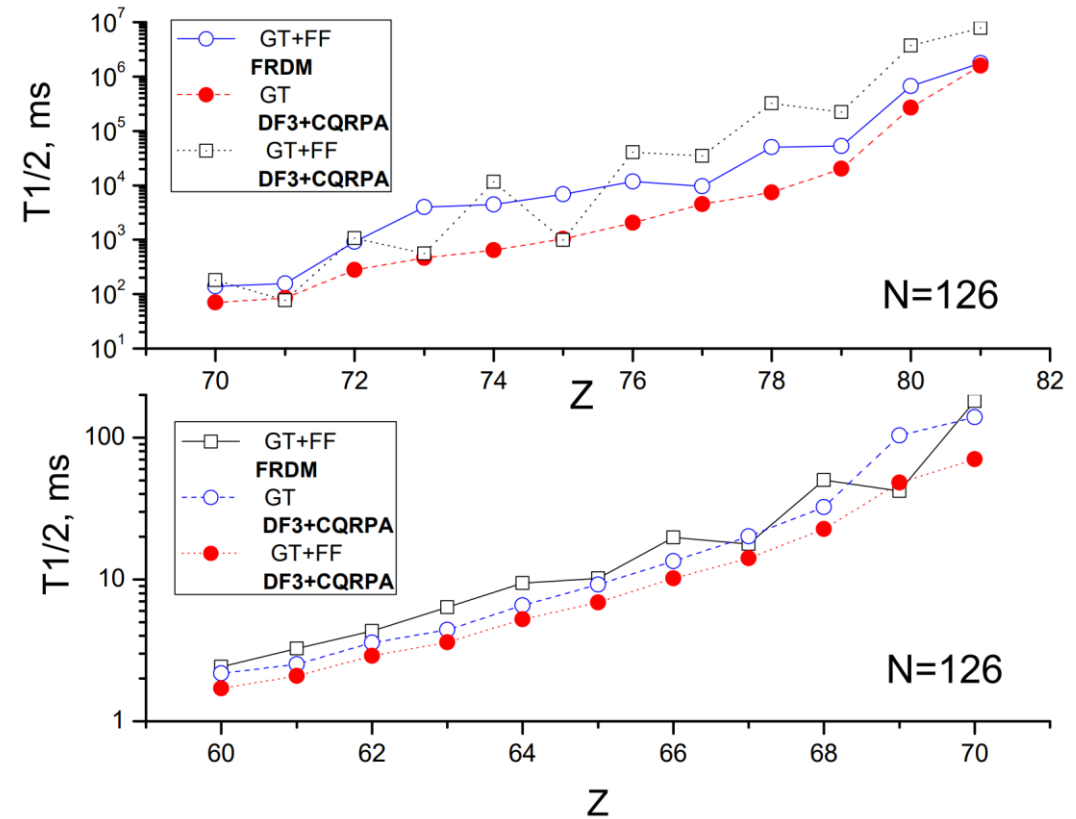
$N=126$ isotones are important for the r -process nucleosynthesis

$T_{1/2} \text{ exp} = 16+6-5$

^{204}Pt , $T_{1/2}(\text{tot}) = 16.43 \text{ s}$, $Q_{\beta} = 3.01 \text{ MeV}$



I.N. Borzov, Physics of Atomic nuclei, 74,1442 (2011)

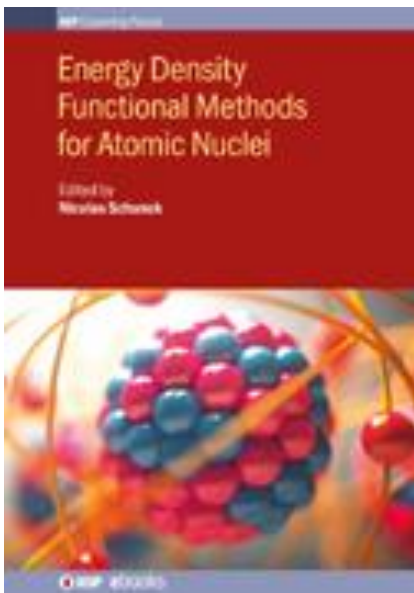


Competition between allowed and first-forbidden β decay in r -process waiting-point nuclei within a relativistic beyond-mean-field approach

Caroline E. P. Robin and Gabriel Mart'inez-Pinedo, Phys. Rev. (2024), arXiv:2403.17115

NL3*

“...Again, the too strong decrease of the half-lives due to QVC observed in ^{204}Pt ($\sim 1\text{s}$ I.B.) and ^{206}Hg ($\sim 80\text{s}$) could potentially be explained by the fact that, in the present study, we do not include ground-state correlations induced by QVC.”



Most of the nuclear EDFs used in self-consistent mean-field calculations have been derived from phenomenological effective interactions.

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}^v(\rho, \tau) + \mathcal{E}^s(\rho) + \mathcal{E}^{ls}(\rho, \vec{J}) + \mathcal{E}^{\text{Coul}}(\rho) + \mathcal{E}^{\text{pair}}(\rho) + \mathcal{E}^{\text{c.m.}}(\rho) \quad .$$

$$E_0^{\text{int}}[\rho] = \int \mathcal{E}(\rho(\mathbf{r})) d^3r = \int \frac{a\rho^2}{2} (1 + \alpha\rho^\sigma) d^3r,$$

Skyrme DF

In S-C FFST normal part of Fayans DF: fractional-linear term depending on nucleon densities. The idea is to transform this *ansatz* to Migdal's quasiparticles

$$\mathcal{E}(\rho) = \frac{a\rho^2}{2} \frac{1 + \alpha\rho^\sigma}{1 + \gamma\rho}.$$

Fayans DF

! The Fayans DF includes Coulomb exchange, surface and pairing terms depending on density gradient.

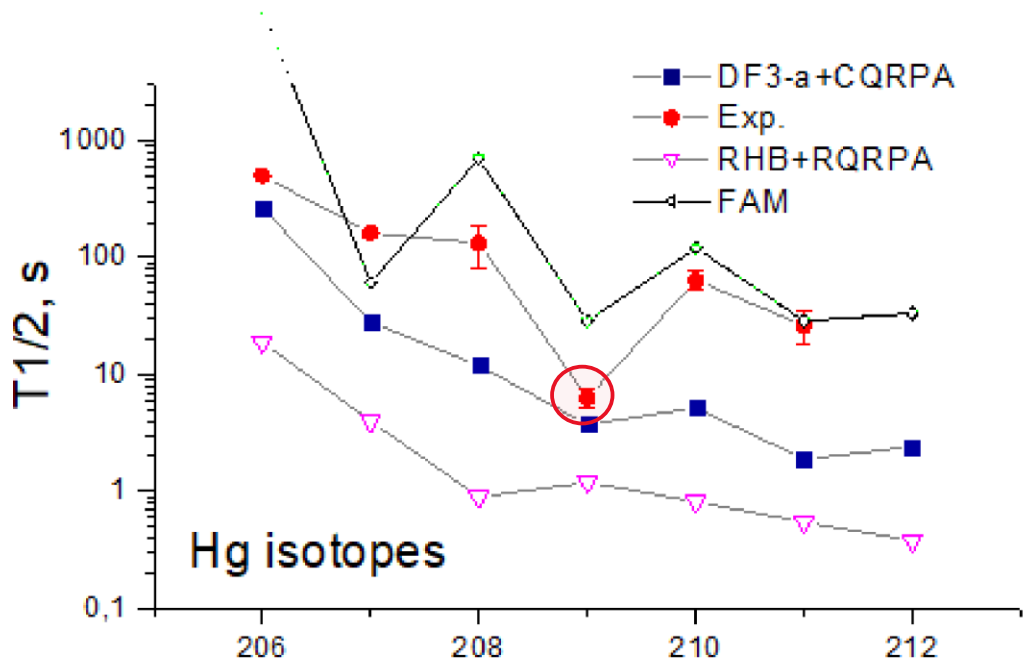
$$\varepsilon_{\text{pair}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \sum_{\tau = n,p} \mathcal{F}^{\xi,\tau}(\rho_+(\mathbf{r})) |\nu_\tau(\mathbf{r})|^2.$$

$$f^\xi(x_+(\mathbf{r})) = f_{\text{ex}}^\xi + h^\xi(x_+)^q(\mathbf{r}) + f_{\nabla}^\xi r_0^2 (\nabla x_+(\mathbf{r}))^2 \quad . \quad x_+ = (\rho_p + \rho_n) / 2 \rho_0$$

! Fayans functional is the Kohn-Sham type EDF with free (independent-particle) kinetic energy operator

$$\tau = p^2/2M, \quad \text{effective mass } m^*/M_N = 1$$

DF3-a + CQRPA, RHB + QRPA, Finite Amplitude Method



*In the Finite Amplitude Method (FAM)
odd-even effect
in Qbeta values and T1/2
is too strong for Hg isotopes*

*E. M. Ney, J. Engel, T. Li, and N. Schunck, Global de-scription of β^- decay with the axially deformed skyrme finite-amplitude method: Extension to odd-mass and odd-odd nuclei, *Phys. Rev. C* 102, 034326 (2020).*

Согласовать RMF расчеты с эксп. данными по одночастичным спектрам можно, если усложнить модель добавив PVC ...2p-2h... Kink, скорее всего, можно будет описать, но бета-распад еще сильнее ускорится.



New CERN-ISOLDE
exp. run for A=210-211
Hg in 2024

Функционал Фаянса. Новые ограничения из уравнений состояния.

И. Н. Борзов, С. В. Толоконников *Ядерная физика* 86 №3, 403-409 (2023)

Предложено новое уравнение состояния для функционала плотности энергии DF3-а. **Варьируется свободный параметр h_2^- изовекторной объемной части функционала** с дополнительным условием на верхний предел энергии максимума гигантского дипольного резонанса в ядре ^{208}Pb . При этом сохранено качество предыдущего фита DF3-а ядерным плотностям, массам ядер, одночастичным уровням и зарядовым радиусам. Параметры УРС - энергия симметрии $J=S(\rho_0)$ и ее производная $L(\rho_0)$ сравниваются с их оценками из экспериментов по массам и зарядовым радиусам ядер. Для извлеченного параметра наклона $L(\rho_0) = 55 - 60$ МэВ величина «нейтронной шубы» $\Delta R_{np} = 0.183 - 0.170$ фм (Табл.1), что близко к оценке $\Delta R_{np} = 0.17 \pm 0.004$ фм, найденной в модели Гауссовских процессов из ядерных масс, радиусов нейтронных звезд и экспериментов по гравитационным волнам. Эта оценка точнее, чем найденная в **нарушающем четность электронном рассеянии** – в эксперименте **PREX II** -- $\Delta R_{np} = 0.283 \pm 0.071$ фм. Важно, что величина “нейтронной шубы” для референтного ядра ^{208}Pb , оцененная в работе *R Essik et.al Phys.Rev. C 104 (2021)*, как $\Delta R_{np}(\text{exp}) = 0.183 \pm 0.004$ фм описывается в том же интервале значений $h_2^- = 1.5 - 2.0$: $\Delta R_{np}(\text{th}) = 0.183 - 0.170$ фм.

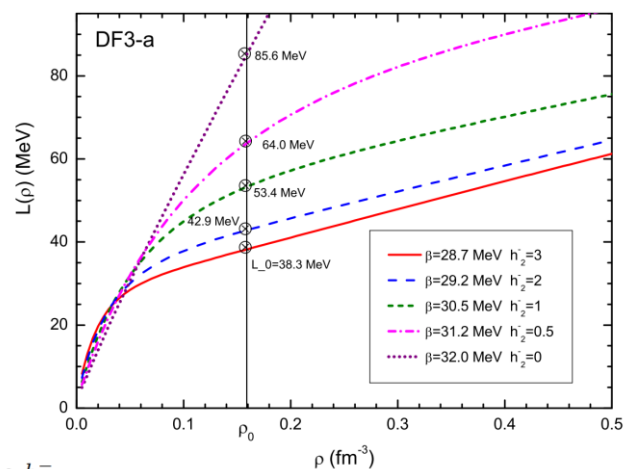
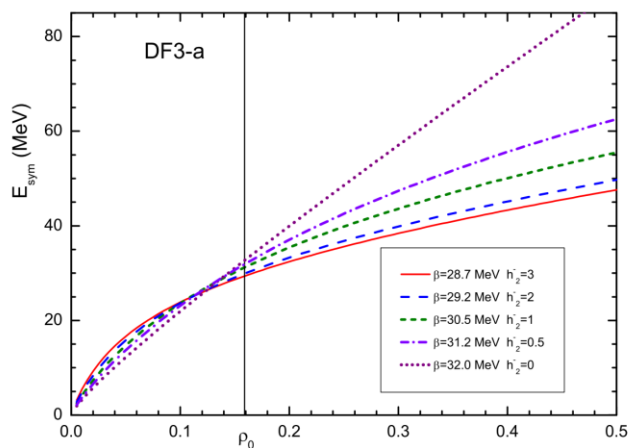


Таблица 1. Расчет с функционалом DF3 для различных значений параметра h_2^- .

$\omega_{GDR} = \sqrt{m_3/m_1}$, m_1, m_3 – первый и третий моменты силовой функции GDR.

h_2^-	J (МэВ)	f_{in}^-	f_{ex}^-	f_{surf}^-	ω_{GDR} (^{208}Pb) (МэВ)	$L(\rho_0)$ (МэВ)	ΔR_{np} (^{208}Pb) (фм)	ΔR_{np} (^{48}Ca) (фм)
0	32.0	0.808	0.808	0.808	12.80	85.6	0.228	0.192
0.5	31.2	0.775	1.163	0.969	13.37	64.0	0.204	0.180
1	30.5	0.747	1.494	1.115	13.73	53.4	0.184	0.170
2	29.2	0.694	2.080	1.387	14.11	42.9	0.154	0.154
3	28.7	0.673	2.693	1.687	14.41	38.3	0.137	0.143

$$\Delta R_{np}(\text{exp})^{208\text{Pb}} = 0.17 \pm 0.004 \text{ fm}$$

R Essik et.al PR C 104 (2021)

$$\Delta R_{np}(\text{exp}) = 0.283 \pm 0.071 \text{ fm}$$

PREX-II Collaboration (2021)

Most of the nuclear EDFs used in self-consistent mean-field calculations have been derived from phenomenological effective interactions. A recent proposal: the Skyrme functional combined with the surface and pairing parts from the Fayans functional.

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}^v(\rho, \tau) + \mathcal{E}^s(\rho) + \mathcal{E}^{ls}(\rho, \vec{J}) + \mathcal{E}^{\text{Coul}}(\rho) + \mathcal{E}^{\text{pair}}(\rho) + \mathcal{E}^{\text{c.m.}}(\rho) \quad .$$

	Skyrme	Fayans
volume:	$\mathcal{E}_{\text{Sk}}^v = \sum_{t=0}^1 [(C_{t0}^{\rho\rho} + C_{tD}^{\rho\rho}\rho_0^\alpha)\rho_t^2 + C_t^{\rho\tau}\rho_t\tau_t]$ $C_{t0}^{\rho\rho}, C_{tD}^{\rho\rho}, \alpha, C_t^{\rho\tau} \leftrightarrow E/A_{\text{eq}}, \rho_{\text{eq}}, K, J, L, \frac{m^*}{m}, \kappa_{\text{TRK}}$	$\mathcal{E}_{\text{Fy}}^v = \frac{1}{3}\varepsilon_F\rho_{\text{sat}} \left[a_+^v \frac{1-h_{1+}^v x_0^\sigma}{1+h_{2+}^v x_0^\sigma} x_0^2 + a_-^v \frac{1-h_{1-}^v x_0}{1+h_{2-}^v x_0} x_1^2 \right]$ $a_\pm^v, h_{1\pm}^v, h_{2\pm}^v \leftrightarrow E/A_{\text{eq}}, \rho_{\text{eq}}, K, J, L, h_{2-}^v$
surface :	$\mathcal{E}_{\text{Sk}}^s = \sum_{t=0}^1 C_t^{\rho\Delta\rho} \rho_t \Delta\rho_t$	$\mathcal{E}_{\text{Fy}}^s = \frac{1}{3}\varepsilon_F\rho_{\text{sat}} \frac{a_+^s r_s^2 (\vec{\nabla} x_0)^2}{1+h_+^s x_0^\sigma + h_\nabla^s r_s^2 (\vec{\nabla} x_0)^2}$
spin-orbit:	$\mathcal{E}_{\text{Sk}}^{ls} = \sum_{t=0}^1 C_t^{\rho\nabla J} \rho_t \nabla \cdot J_t$	$\mathcal{E}_{\text{Fy}}^{ls} = \sum_{t=0}^1 C_t^{\rho\nabla J} \rho_t \nabla \cdot J_t$
pairing:	$\mathcal{E}_{\text{Sk}}^{\text{pair}} = \frac{1}{4} \sum_{q \in \{p, n\}} V_{\text{pair}, q} \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_{\text{pair}}} \right) \check{\rho}_q^2$	$\mathcal{E}_{\text{Fy}}^{\text{pair}} = \frac{2\varepsilon_F}{3\rho_{\text{sat}}} \check{\rho}_q^2 \left[f_{\text{ex}}^\xi + h_+^\xi x_{\text{pair}}^\gamma + h_\nabla^\xi r_s^2 (\vec{\nabla} x_{\text{pair}})^2 \right]$

where $x_t = \rho_t/\rho_{\text{sat}}$ and $x_{\text{pair}} = \check{\rho}_q/\rho_{\text{sat}}$. The γ , $\rho_{\text{sat}} = 0.16 \text{ fm}^{-3}$ and $\varepsilon_F = \varepsilon_F(\rho_{\text{sat}})$ are given, fixed values. The non-linear surface coefficient is fixed as $h_+^s = h_{2+}^v$. Coulomb term and c.m. correction are irrelevant here. Note that the parameters for the volume terms are handled in term of nuclear matter parameters E/A_{eq} etc as is indicted in the line below the volume terms.

V.A Khodel, E.E Saperstein Phys.Repts. 92 (1982), A.B Migdal FFST. 2nd ed. 1983, S.A Fayans JETP Letters 104 (1998)

*HFB with M3Y-P6a NN-interaction
with density-dependent (3N) LS-part
(It has no i-g inversion).*

$$V_{ls}(\rho) = D[\rho(\mathbf{r}_{ij})] [-\nabla_{ij}^2 \delta(\mathbf{r}_{ij})] \mathbf{L}_{ij} \cdot (\mathbf{s}_i + \mathbf{s}_j),$$

$$D[\rho(\mathbf{r})] = -w_1 \frac{\rho(\mathbf{r})}{1 + d_1 \rho(\mathbf{r})}$$

H. Nakada and T. Inakura
Effects of three-nucleon spin-orbit interaction
on isotope shifts of Pb nuclei.
Phys. Rev. C **91**, 021302(R) (2015).

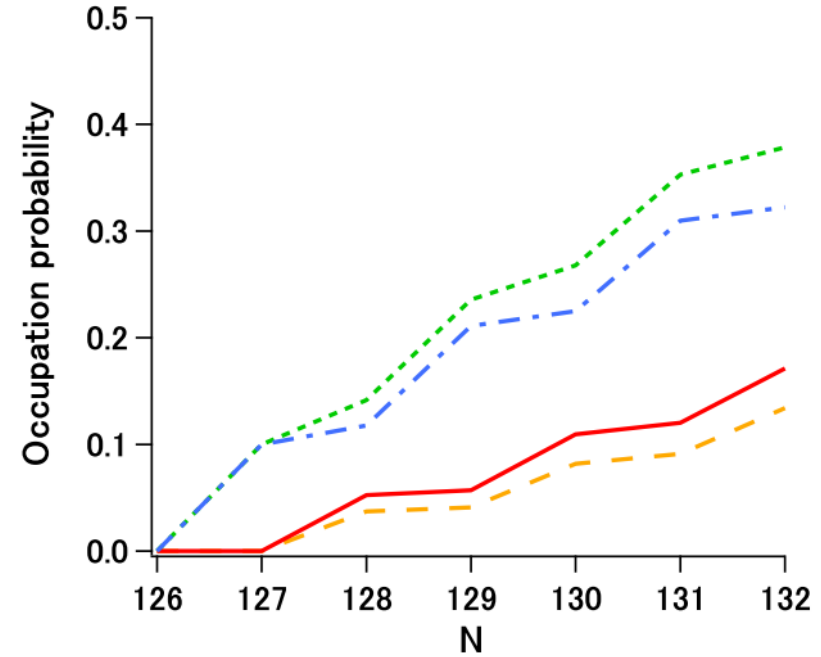


FIG. 3. (Color online) Occupation probabilities on $n1g_{9/2}$ and $n0i_{11/2}$ obtained by the HFB calculations. Blue dot-dashed (green dotted) line is for $n1g_{9/2}$ and red solid (orange dashed) line for $n0i_{11/2}$ in the M3Y-P6a (M3Y-P6) results.

Spin-isospin excitations (GT, FF).

Continuum pn-QRPA based on the generalized density-functional

$S=0, T=1$ (nn,pp) mass dependent g.s. pairing + $S=1, T=0$ (pn) dynamic pairing
 Continuum **pnQRPA**, full ph-basis, **SO(8) symmetry**

Möller, P.; Nix, J. R.; Kratz, K.-L.
 ADNDT, Vol. 66, p.131,1996

Pairing only in the g.s.
 Dynamic pairing ignored.
 BCS + RPA, SU(4).
 Spurious effects.



U: Particle-hole channel:
 δ -interaction
 with Landau-Migdal constant g'
 + π -meson + ρ -meson exchange

V: Particle-particle channel:
 $T=0, \delta$ -interaction
 with one parameter: g'_{pp}

CQRPA :
 NN-interaction parameters (ph):
 are the same for all nuclei with $A > 40$.