Темная материя как гравитационный эффект модифицированной теории гравитации – теории вложения

С.А. Пастон

Санкт-Петербургский государственный университет

Загадка темной материи:

гипотеза ее существования объясняет наблюдения в широком диапозоне масштабов –

от галактических (кривые вращения),
до космологических (формирование структур и полная масса материи во Вселенной).

В рамках модели ΛCDM – современной стандартной модели космологии – свойства темной материи близки к свойствам нерелятивистской пылевидной материи.

Однако, попытки детектирования темной материи (обнаружения ее взаимодействия с обычной материей)
не дают результата!

Может быть, темной материи на самом деле не существует, а она является эффектом описания гравитационного взаимодействия?

Может быть, темной материи на самом деле не существует, а она является эффектом описания гравитационного взаимодействия?

Возможные варианты модификации теории гравитации:

- MOND (Modified Newtonian Dynamics);
- $f(R)$-гравитация;
- скалярно-тензорные модели гравитации;
- миметическая гравитация;
- теория вложения (embedding gravity);
- ...

Чтобы была возможность объяснить все связываемые с темной материей эффекты, модификация гравитации должна обладать достаточно большим числом дополнительных степеней свободы!

Миметическая гравитация

$$S = S^{\mathrm{EH}}[g(...)] + S_m[g(...)], \qquad S^{\mathrm{EH}} = -\frac{1}{2\varkappa}\int d^4x\sqrt{-g}\,R \quad (1)$$

$$g_{\mu\nu} = \tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{g}^{\alpha\beta}(\partial_\alpha\varphi)(\partial_\beta\varphi) \qquad \left(\Rightarrow \quad g^{\mu\nu}(\partial_\mu\varphi)(\partial_\nu\varphi) \equiv 1\right) \quad (2)$$

$$G_{\mu\nu} - \varkappa\, T_{\mu\nu} = \varkappa\rho(\partial_\mu\varphi)(\partial_\nu\varphi), \qquad D_\mu(\rho g^{\mu\nu}\partial_\nu\varphi) = 0,$$
$$\rho \equiv \frac{1}{\varkappa}\, g^{\mu\nu}(G_{\mu\nu} - \varkappa\, T_{\mu\nu}) \quad (3)$$

(A.H. Chamseddine, V. Mukhanov, JHEP, 2013:11 (2013), 135, arXiv:1308.5410)

Миметическая гравитация

$$S = S^{\text{EH}}[g(\dots)] + S_m[g(\dots)], \qquad S^{\text{EH}} = -\frac{1}{2\varkappa}\int d^4x\sqrt{-g}\,R \quad (1)$$

$$g_{\mu\nu} = \tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{g}^{\alpha\beta}(\partial_\alpha\varphi)(\partial_\beta\varphi) \qquad \Big(\Rightarrow \quad g^{\mu\nu}(\partial_\mu\varphi)(\partial_\nu\varphi) \equiv 1\Big) \quad (2)$$

$$G_{\mu\nu} - \varkappa T_{\mu\nu} = \varkappa\rho(\partial_\mu\varphi)(\partial_\nu\varphi), \qquad D_\mu(\rho g^{\mu\nu}\partial_\nu\varphi) = 0,$$

$$\rho \equiv \frac{1}{\varkappa}g^{\mu\nu}(G_{\mu\nu} - \varkappa T_{\mu\nu}) \quad (3)$$

(A.H. Chamseddine, V. Mukhanov, JHEP, 2013:11 (2013), 135, arXiv:1308.5410)

Эквивалентная формулировка в виде ОТО с дополнительной *фиктивной* (темной?!) материей:

$$S = S^{\text{EH}} + S_m + S^+ \quad (4)$$

$$S^+ = -\frac{1}{2}\int d^4x\,\sqrt{-g}\,\rho\Big(1 - g^{\mu\nu}(\partial_\mu\varphi)(\partial_\nu\varphi)\Big) \quad (5)$$

(A. Golovnev, Phys.Lett.B, 728 (2014), 39, arXiv:1310.2790)

Из вида уравнений

$$G_{\mu\nu} = \varkappa\Big(T_{\mu\nu} + \rho(\partial_\mu\varphi)(\partial_\nu\varphi)\Big), \qquad D_\mu(\rho g^{\mu\nu}\partial_\nu\varphi) = 0 \tag{6}$$

видно, что ρ – плотность фиктивной материи, а ее скорость

$$u_\mu = \partial_\mu\varphi, \tag{7}$$

т.е. материя движется потенциально.

Слишком мало степеней свободы!

Усложнения миметической гравитации

Модификации действия фиктивной материи:

$$S^{+} = -\frac{1}{2}\int d^4x\,\sqrt{-g}\,\left(\rho\Big(1 - g^{\mu\nu}(\partial_\mu\varphi)(\partial_\nu\varphi)\Big) - V(\rho) + \frac{1}{2}\gamma(\rho)\,(\Box\rho)^2\right) \quad (8)$$

(A. Chamseddine, V. Mukhanov, A. Vikman, JCAP, 2014:06 (2014), 017, arXiv:1403.3961;
L. Mirzagholi, A. Vikman, JCAP, 2015:06 (2015), 028, arXiv:1412.7136)

Модификация миметической замены:

$$S = S^{\mathrm{EH}}[g(\ldots)] + S_m[g(\ldots)] \quad (9)$$

$$g_{\mu\nu} = \tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{g}^{\gamma\delta}\,(\partial_\gamma\varphi + \alpha\partial_\gamma\beta)\,(\partial_\delta\varphi + \alpha\partial_\delta\beta) \quad (10)$$

$$u_\mu = \partial_\mu\varphi + \alpha\partial_\mu\beta \quad (11)$$

(S. P., Phys. Rev. D 96 (2017) 084059, arXiv:1708.03944)

Теория вложения

$$S = S^{\mathrm{EH}}[g(...)] + S_m[g(...)], \qquad S^{\mathrm{EH}} = -\frac{1}{2\varkappa}\int d^4x\sqrt{-g}\,R, \quad (12)$$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab}(\partial_\mu y^a)(\partial_\nu y^b), \quad (13)$$

где $a, b = 0, \ldots, 9$.

(T. Regge, C. Teitelboim, *"General relativity a la string: a progress report"*, Proceedings of the First Marcel Grossmann Meeting (Trieste, Italy, 1975), 1977, p. 77, arXiv:1612.05256)

Простой геометрический смысл – метрика становится индуцированной метрикой четырехмерной поверхности в плоском объемлющем пространстве, описываемой функцией вложения $y^a(x^\mu)$.

Первоначальная идея теории вложения – переписать ОТО сходно с теорией струны в надежде на улучшение процедуры квантования.

Первоначальная идея теории вложения – переписать ОТО сходно с теорией струны в надежде на улучшение процедуры квантования.

Но – *лишние* решения!

Уравнения движения (уравнения Редже-Тейтельбойма)

$$D_\mu\Big(\left(G^{\mu\nu} - \varkappa T^{\mu\nu}\right)\partial_\nu y^a\Big) = 0 \qquad (14)$$

Редже и Тейтельбойм: введем *ad hoc* дополнительные связи

$$G^{\mu 0} - \varkappa T^{\mu 0} = 0 \qquad (15)$$

Уравнения Редже-Тейтельбойма можно переписать в виде уравнений Эйнштейна с дополнительным вкладом $\tau^{\mu\nu}$ – ТЭИ *фиктивной* (темной?!) материей:

$$G^{\mu\nu} = \varkappa \left(T^{\mu\nu} + \tau^{\mu\nu} \right),$$
$$D_\mu \left(\tau^{\mu\nu} \partial_\nu y^a \right) = 0,$$
$$\eta_{ab} (\partial_\mu y^a)(\partial_\nu y^b) = g_{\mu\nu} \qquad (16)$$

(M. Pavsic, *Class. Quant. Grav.*, 2 (1985), 869, arXiv:1403.6316)

Соответствующее действие можно записать как

$$S = S^{\mathsf{EH}} + S_m + S^+, \tag{17}$$

где

$$S^+ = \frac{1}{2}\int d^4x \sqrt{-g}\left((\partial_\mu y^a)(\partial_\nu y^b)\eta_{ab} - g_{\mu\nu}\right)\tau^{\mu\nu}, \tag{18}$$

(S. P., *Phys. Rev. D*, 96 (2017), 084059, arXiv:1708.03944)
если описывать фиктивную материю независимыми переменными y^a и $\tau^{\mu\nu}$;

или

$$S^+ = \int d^4x \sqrt{-g}\left(j_a^\mu \partial_\mu y^a - \mathbf{tr}\sqrt{g_{\mu\nu} j_a^\nu \eta^{ab} j_b^\alpha}\right), \tag{19}$$

(S. P., A. Sheykin, *Eur. Phys. J. C*, 78: 12 (2018), 989, arXiv:1806.10902)
если в качестве описывающих фиктивную материю независимых переменных кроме y^a выбрать некоторый набор токов j_a^μ.

Именно эти токи оказываются сохраняющимися вследствие одного из уравнений движения:

$$D_\mu j_a^\mu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_\mu \left(\sqrt{-g}\, j_a^\mu\right) = 0, \qquad j_a^\mu = \tau^{\mu\nu}\partial_\nu y_a \tag{20}$$

Если предположить, что все эти токи являются нерелятивистскими в объемлющем пространстве:

$$j_a^\mu = \delta_a^0 j^\mu + \delta j_a^\mu, \qquad \delta j_a^\mu \to 0, \tag{21}$$

то это приводит к *нерелятивистскому пределу* теории вложения, в котором фиктивная материя оказывается нерелятивистской.

В таком пределе соответствующее темной материи действие (19) переходит в действие

$$S^+ = \int d^4x \sqrt{-g} \left(j^\mu \partial_\mu y^{(0)} - \sqrt{j^\mu g_{\mu\nu} j^\nu} \right), \tag{22}$$

описывающее потенциально движущуюся пылевидную материю.

Однако этот предел сингулярен, поскольку одно из уравнений движения имеет вид

$$\partial_\mu y^a = \beta^{-1}_{\mu\nu} j^{\nu a}, \qquad \beta_\mu{}^\alpha = \sqrt{g_{\mu\nu} j^\nu_a \eta^{ab} j^\alpha_b} \tag{23}$$

Теория вложения в пределе слабой гравитации

Слабая гравитация:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}, \qquad \delta g_{\mu\nu} \ll 1 \tag{24}$$

Нужно выбрать соответствующую функцию вложения

$$y^a(x) = \bar{y}^a(x) + \delta y^a(x) \tag{25}$$

Теория вложения в пределе слабой гравитации

Слабая гравитация:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}, \qquad \delta g_{\mu\nu} \ll 1 \tag{24}$$

Нужно выбрать соответствующую функцию вложения

$$y^a(x) = \bar{y}^a(x) + \delta y^a(x) \tag{25}$$

Фоном $\bar{y}^a(x)$ должно быть вложение метрики пространства Минковкого. Выбор не единственный!

Простейший вариант – 4мерная плоскость – приводит к нелинеаризуемости уравнений Редже-Тейтельбойма и к нелинейной связи $\delta g_{\mu\nu}$ и δy^a.

Приращение метрики в линейном приближении:

$$g_{\mu\nu} = (\partial_\mu y^a)(\partial_\nu y_a) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \delta g_{\mu\nu} = (\partial_\mu \delta y^a)(\partial_\nu y_a) + (\mu \leftrightarrow \nu) =$$
$$= \left(\partial_\mu(\delta y_\parallel^a + \delta y_\perp^a)\right)(\partial_\nu y_a) + (\mu \leftrightarrow \nu) =$$
$$= D_\mu \xi_\nu + D_\nu \xi_\mu - 2\delta y_{\perp a} b^a_{\mu\nu}, \qquad (26)$$

где $\xi_\mu = \delta y_\parallel^a \partial_\mu y_a$, и $b^a_{\mu\nu} = D_\mu \partial_\nu y^a$ – вторая основная форма поверхности.

Линейность связи $\delta g_{\mu\nu}$ и δy^a требует выполнения условия

$$\operatorname{rank} b^a_{\mu\nu} = 6, \qquad (27)$$

т.е. *развернутости* вложения.

Фон должен быть развернутым вложением метрики Минковкого, примеры таких вложений можно привести.
(S. P., T. Zaitseva, Universe, 7:12 (2021), 477, arXiv:2111.04188)

Развернутый фон, который приводит к нерелятивистскому движению фиктивной материи:

$$\bar{y}^0 = x^0, \qquad \bar{y}^I = \bar{y}^I(x^i), \tag{28}$$

где $\bar{y}^I(x^i)$ – развернутое вложение $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^9$.

Развернутый фон, который приводит к нерелятивистскому движению фиктивной материи:

$$\bar{y}^0 = x^0, \qquad \bar{y}^l = \bar{y}^l(x^i), \tag{28}$$

где $\bar{y}^l(x^i)$ – развернутое вложение $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^9$.

Функция вложения $y^a(x)$ для соответствующей 4х-мерной поверхности в главном по $1/c$ порядке имеет вид

$$y^0 = x^0 + \frac{1}{c}\psi\left(\frac{x^0}{c}, x^i\right) + o\left(\frac{1}{c^2}\right),$$

$$y^l = \bar{y}^l\left(\frac{x^0}{c}, x^i\right) + \frac{1}{c^2}\bar{\alpha}^{kml}\left(\frac{1}{2}(\partial_k\psi)(\partial_m\psi) - \varphi\delta_{km}\right) + o\left(\frac{1}{c^2}\right), \tag{29}$$

где

$$\bar{\alpha}^{ik}_L = \bar{\alpha}^{ki}_L, \qquad \bar{\alpha}^{ik}_L \partial_m \bar{y}^L = 0, \qquad \bar{\alpha}^{ik}_L \bar{b}^L_{lm} = \frac{1}{2}\left(\delta^i_l\delta^k_m + \delta^i_m\delta^k_l\right) \tag{30}$$

Нерелятивистские уравнения движения фиктивной материи в главном порядке по $1/c$ имеют вид:

$$\partial_t \bar{y}^I = \gamma^I, \qquad \partial_t \psi = \varphi + \frac{1}{2}\gamma^I\gamma^I, \qquad \partial_t \bar{\rho}_\tau = -\partial_i \left(\bar{\rho}_\tau v^i_\tau\right),$$

$$\partial_t(\bar{\rho}_\tau v^m_\tau) =$$

$$= -\bar{\rho}_\tau \partial_m \varphi + \partial_l \left(\bar{\rho}_\tau \bar{\alpha}^{lm}_L \left(\bar{\alpha}^{ik}_L \left((\partial_i \gamma^I)(\partial_k \gamma^I) + \partial_i \partial_k \varphi \right) + 2 v^i_\tau \partial_i \gamma^L \right) \right), \quad (31)$$

где $\gamma^I = (\partial_k \bar{y}^I)\partial_k \psi + \bar{\alpha}^{ik}_I \partial_i \partial_k \psi$, а φ – ньютоновский гравитационный потенциал, соответствующий распределению материи с плотностью $\rho + \bar{\rho}_\tau$.

Параметры, описывающие фиктивную материю: плотность $\bar{\rho}_\tau$, скорость v^i_τ, а также величина ψ и еще 3 функции, параметризующие вложение $\bar{y}^I(x^i)$ плоской метрики.

Присутствует самодействие!

(S. P., Universe, 6:10 (2020), 163, arXiv:2009.06950)