

# Торофлаксы: Аналог состояний Чандрасекара-Кендалла в нецентросимметричных сверхпроводниках

*Анатолий Корнеев (ДФУ, Россия),  
Александр Молочков (ДФУ, Россия),  
Жюльен Гаро (Университет Тура, Франция),  
Максим Чернодуб (Университет Тура, Франция)*

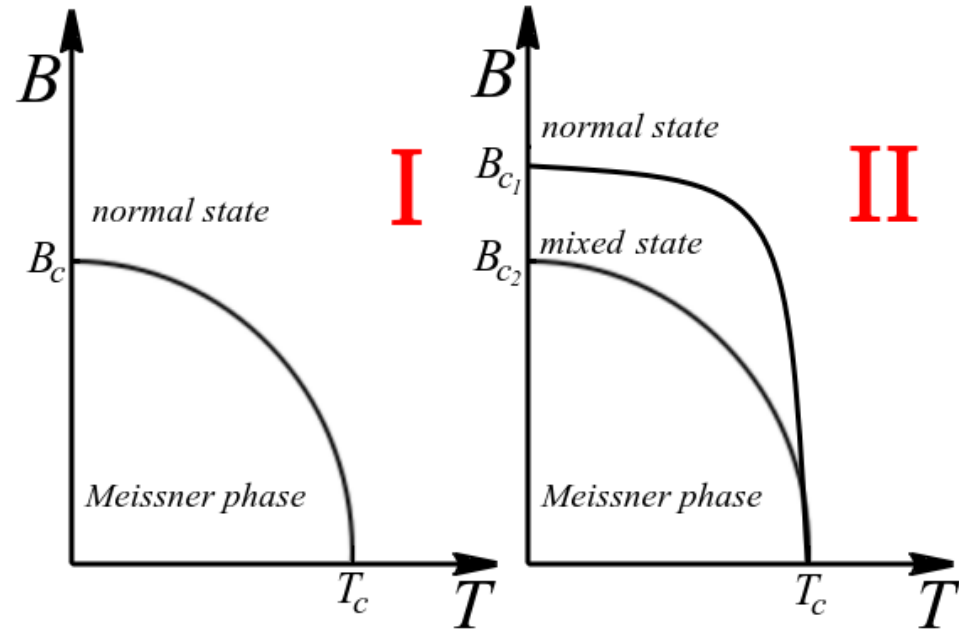
**Где?**

Где?

В нецентросимметричном сверхпроводнике

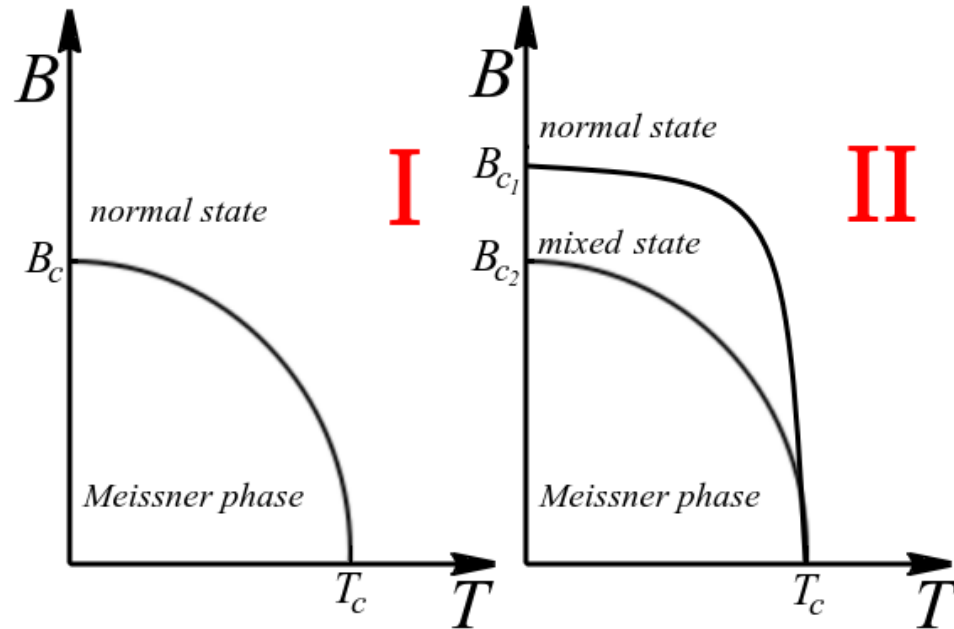
# Сверхпроводимость

Фазовая диаграмма сверхпроводимости

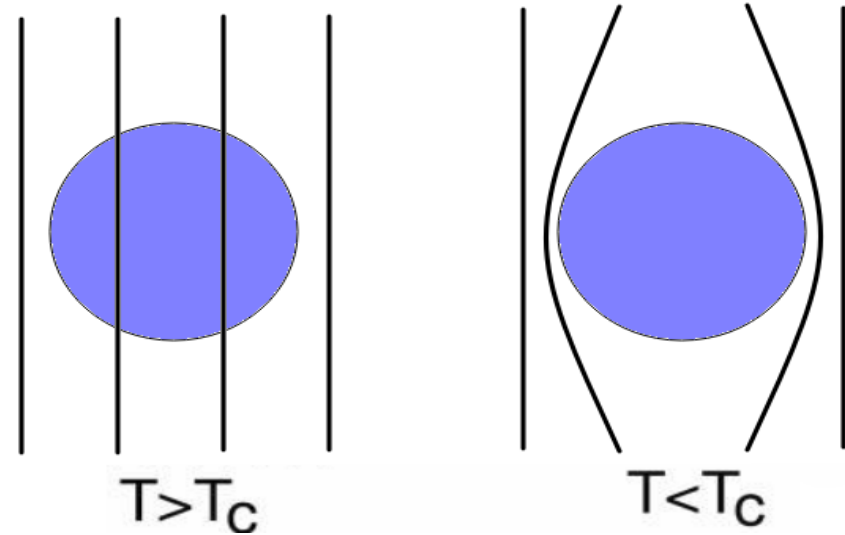


# Сверхпроводимость

Фазовая диаграмма сверхпроводимости

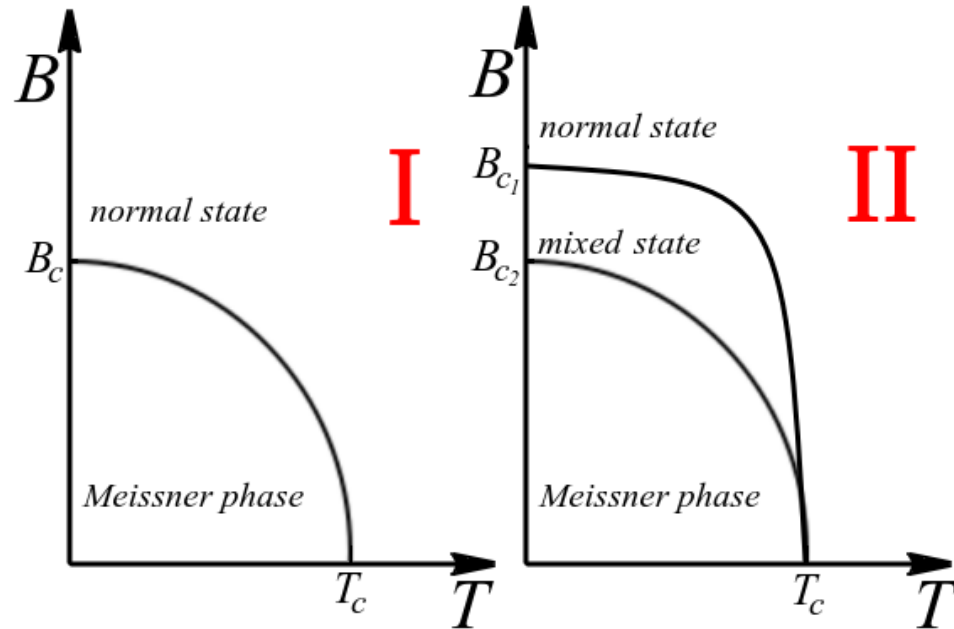


Эффект Мейсснера

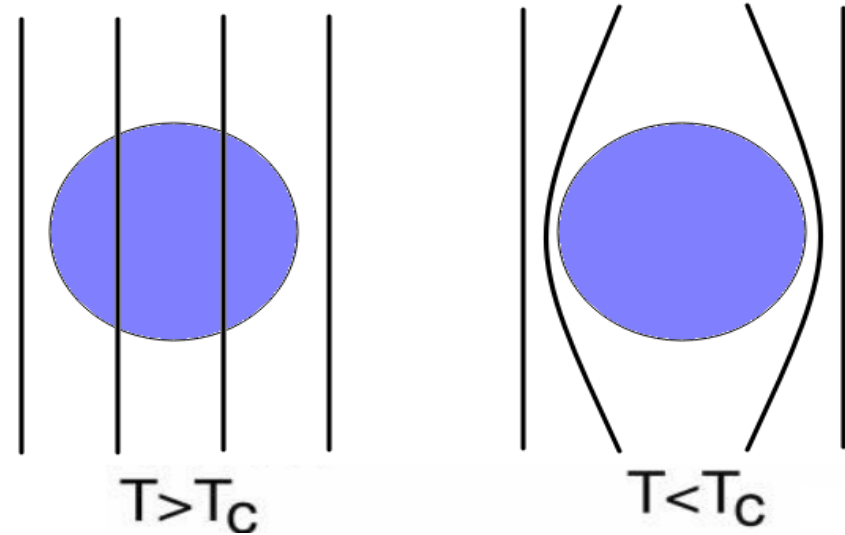


# Сверхпроводимость

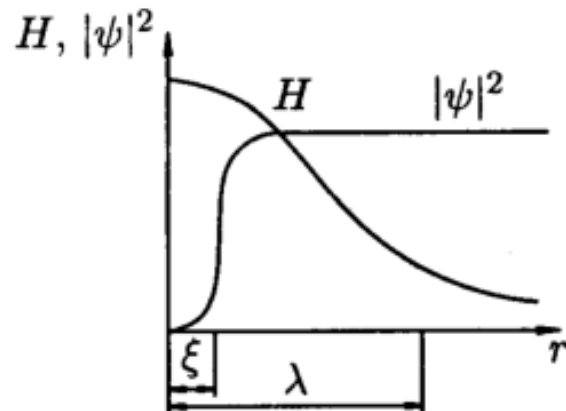
Фазовая диаграмма сверхпроводимости



Эффект Мейсснера

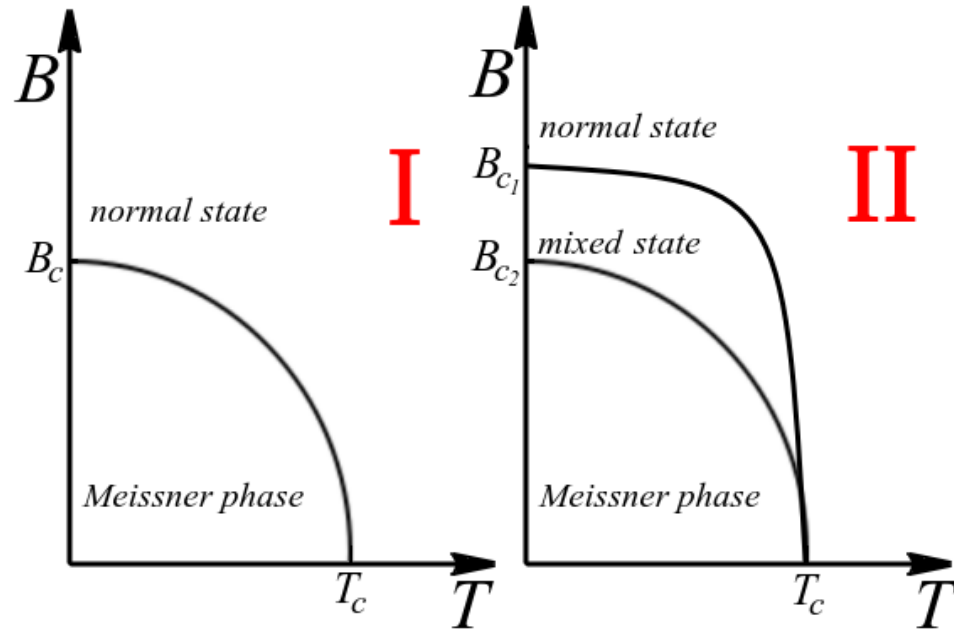


Вихрь Абрикосова

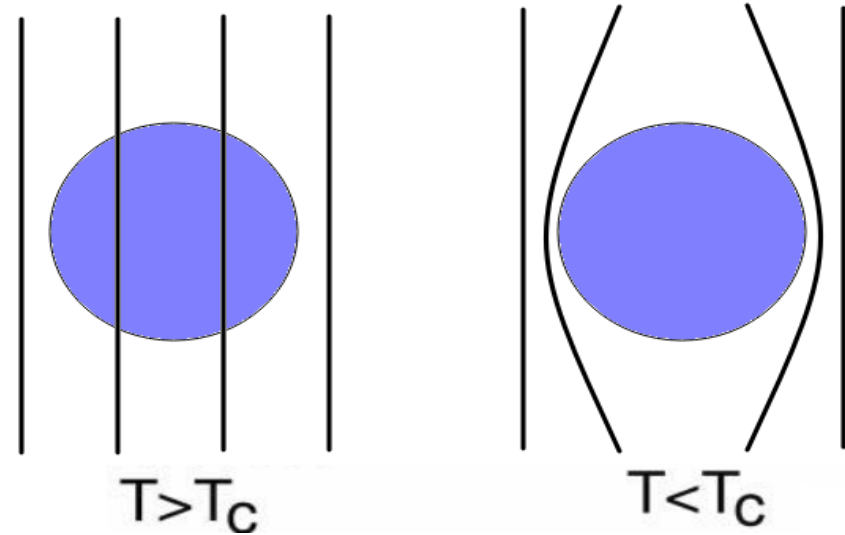


# Сверхпроводимость

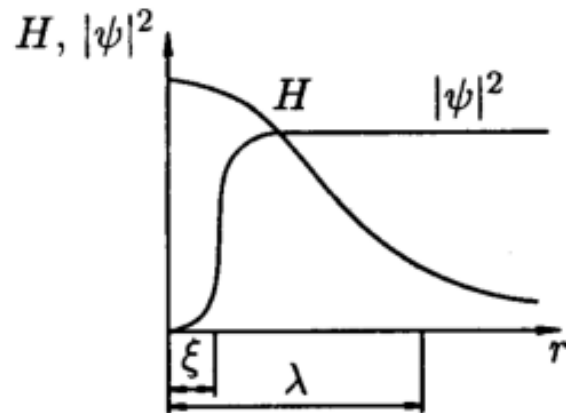
Фазовая диаграмма сверхпроводимости



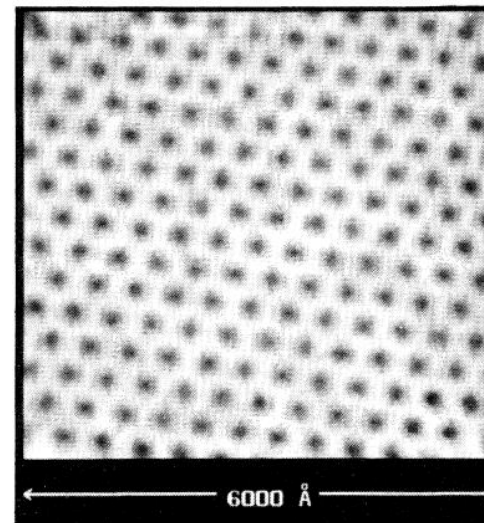
Эффект Мейсснера



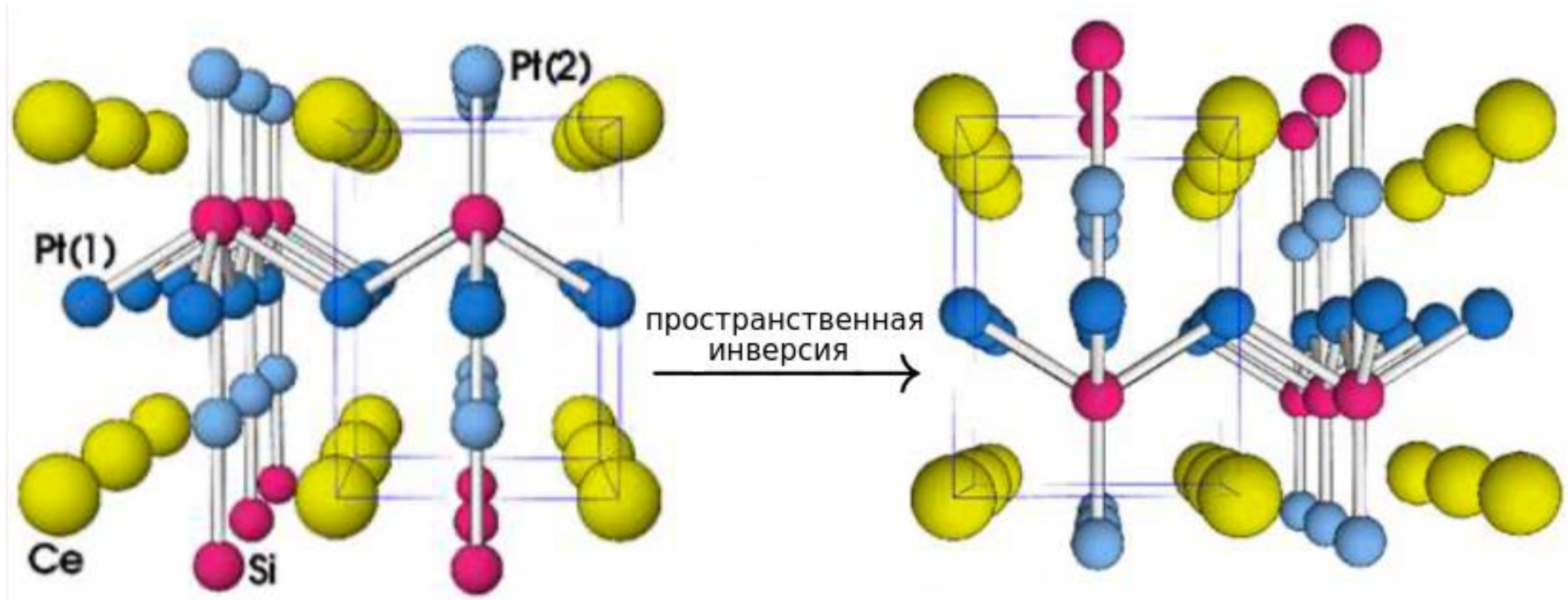
Вихрь Абрикосова



Вихревая решетка



# Нецентросимметричность



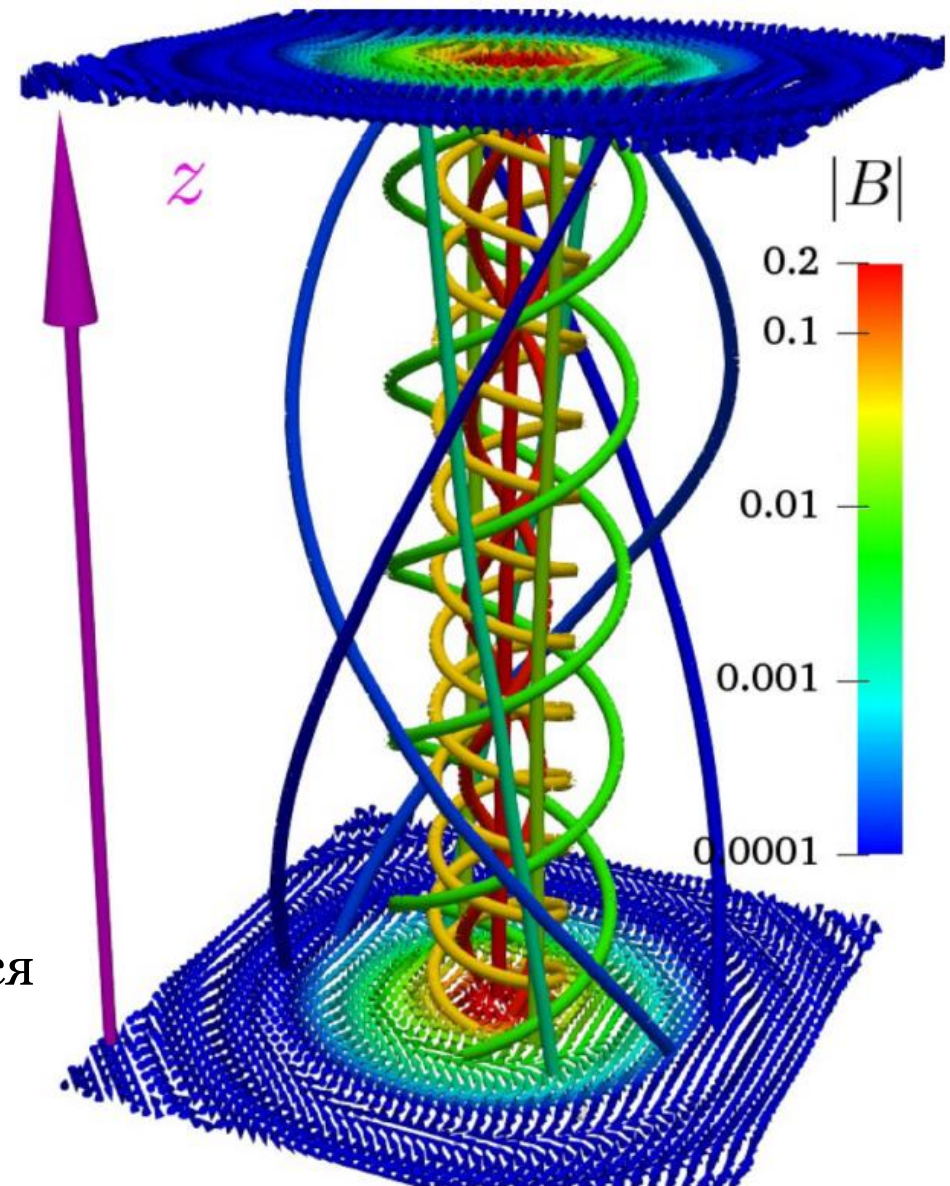
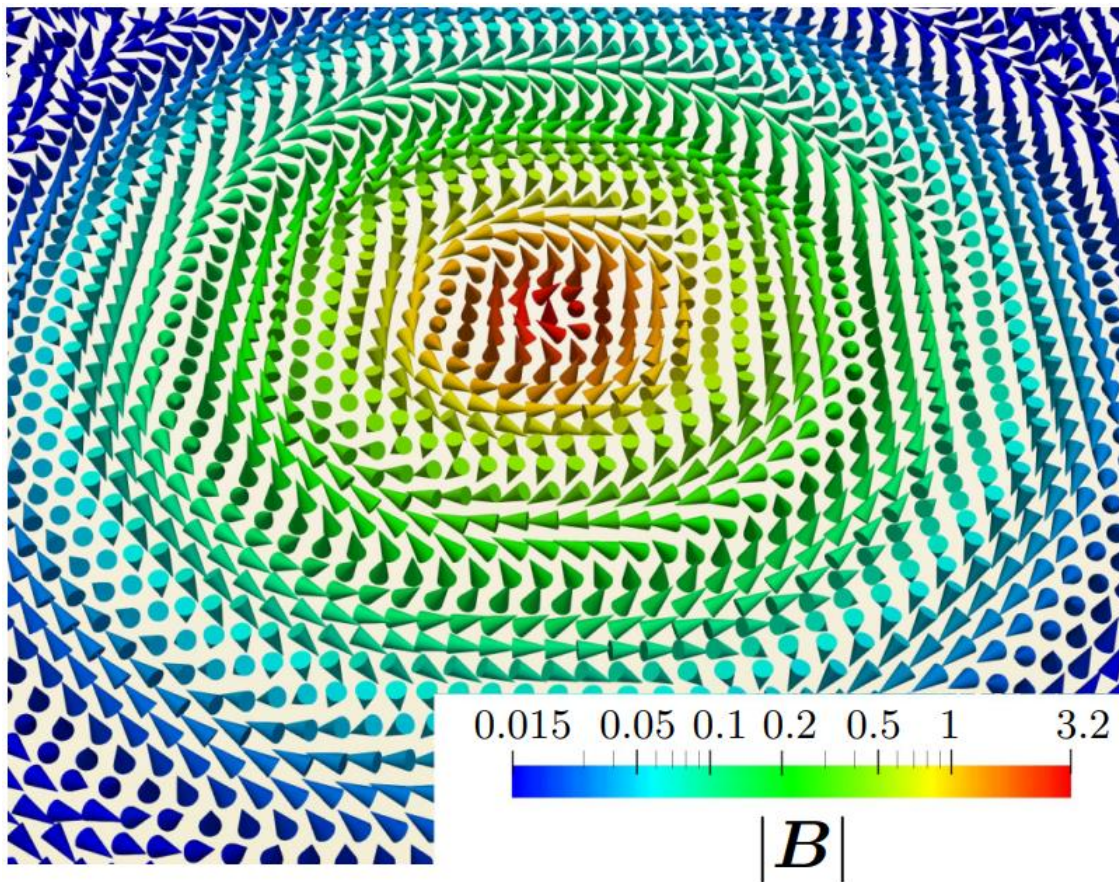
Изображение для CePt<sub>3</sub>S взято из *E. Bauer et al, PRL 92, 027003 (2004)*

Нарушение симметрии пространственной инверсии приводит к ряду новых нетривиальных явлений..

*Bauer E. et al. Lecture Notes in Physics, V. 847, 2010*



# Спирально-вихревые решения



Взаимодействия вихрей с другими вихрями становятся немонотонными с множественными минимумами

*Garaud J. et al., PRB 102, 184516 (2020)*

*Samoilenka A. et al. PRB 102, 184517 (2020)*

**Что?**

**Что?**

Аналог состояний Чандрасекара-Кендалла

# Бессилловые поля

- Конфигурация является бессилловой, когда сила Лоренца  $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$  отсутствует;

# Бессилловые поля

- Конфигурация является бессилловой, когда сила Лоренца  $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$  отсутствует;
- Описывается системой уравнений: 
$$\nabla \times \mathbf{B} = \alpha \mathbf{B}$$

# Бессиловые поля

- Конфигурация является бессиловой, когда сила Лоренца  $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$  отсутствует;
- Описывается системой уравнений: 
$$\nabla \times \mathbf{B} = \alpha \mathbf{B}$$
- Граничные условия на сфере радиуса  $R$ : 
$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) \Big|_{r=R} = 0$$

# Бессиловые поля

- Конфигурация является бессиловой, когда сила Лоренца  $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$  отсутствует;
- Описывается системой уравнений:  $\nabla \times \mathbf{B} = \alpha \mathbf{B}$
- Граничные условия на сфере радиуса  $R$ :  $\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) \Big|_{r=R} = 0$

Решение:  $\mathbf{B}(r, \theta, \varphi) = B_0 \left( u(\alpha r, \theta) \hat{\mathbf{r}} + v(\alpha r, \theta) \hat{\boldsymbol{\theta}} + w(\alpha r, \theta) \hat{\boldsymbol{\varphi}} \right)$

где

$$u(\xi, \theta) = \frac{2}{\xi^3} (\sin \xi - \xi \cos \xi) \cos \theta,$$
$$v(\xi, \theta) = \frac{1}{\xi^3} (\sin \xi - \xi \cos \xi - \xi^2 \sin \xi) \sin \theta,$$
$$w(\xi, \theta) = \frac{2}{\xi^3} (\sin \xi - \xi \cos \xi) \sin \theta.$$

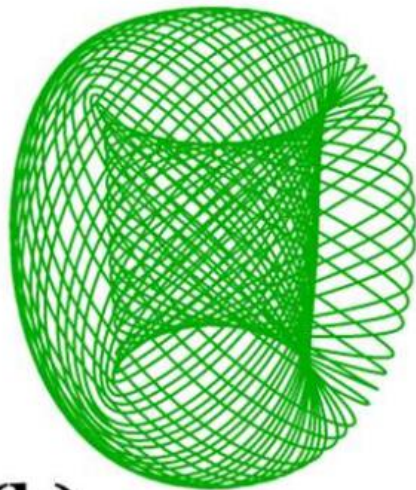
# Бессилловые поля

- Конфигурация является бессилловой, когда сила Лоренца  $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$  отсутствует;
- Описывается системой уравнений: 
$$\nabla \times \mathbf{B} = \alpha \mathbf{B}$$
- Граничные условия на сфере радиуса  $R$ : 
$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) \Big|_{r=R} = 0$$

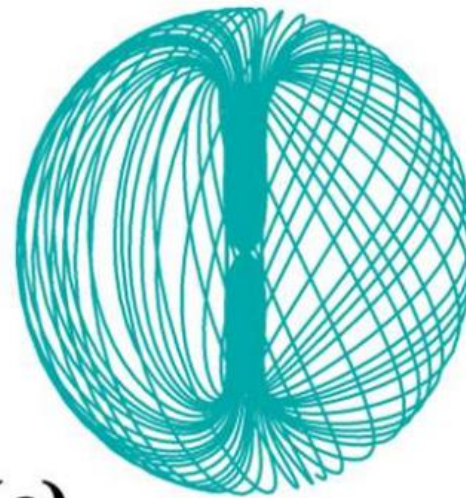
Решение: 
$$\mathbf{B}(r, \theta, \varphi) = B_0 \left( u(\alpha r, \theta) \hat{\mathbf{r}} + v(\alpha r, \theta) \hat{\boldsymbol{\theta}} + w(\alpha r, \theta) \hat{\boldsymbol{\varphi}} \right)$$



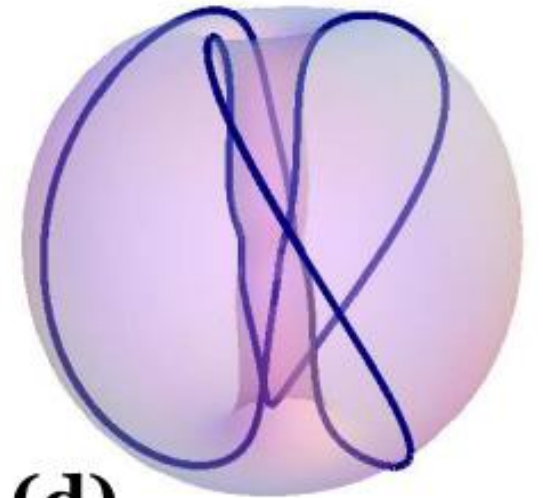
(a)



(b)



(c)



(d)

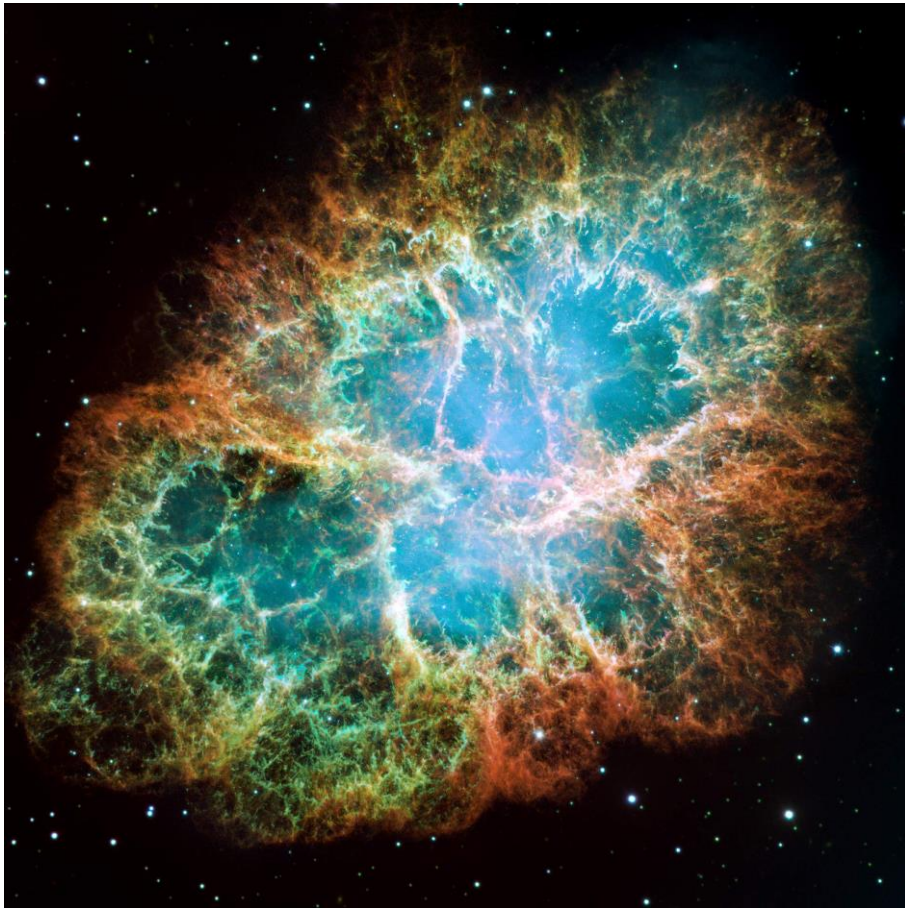


# Бессилловые поля

- Состояния Чандрасекара-Кендалла в астрофизической плазме

*Chandrasekhar, S. et al. Ap. J, 1957*

*Piddington, J.H., AJP, 1957*



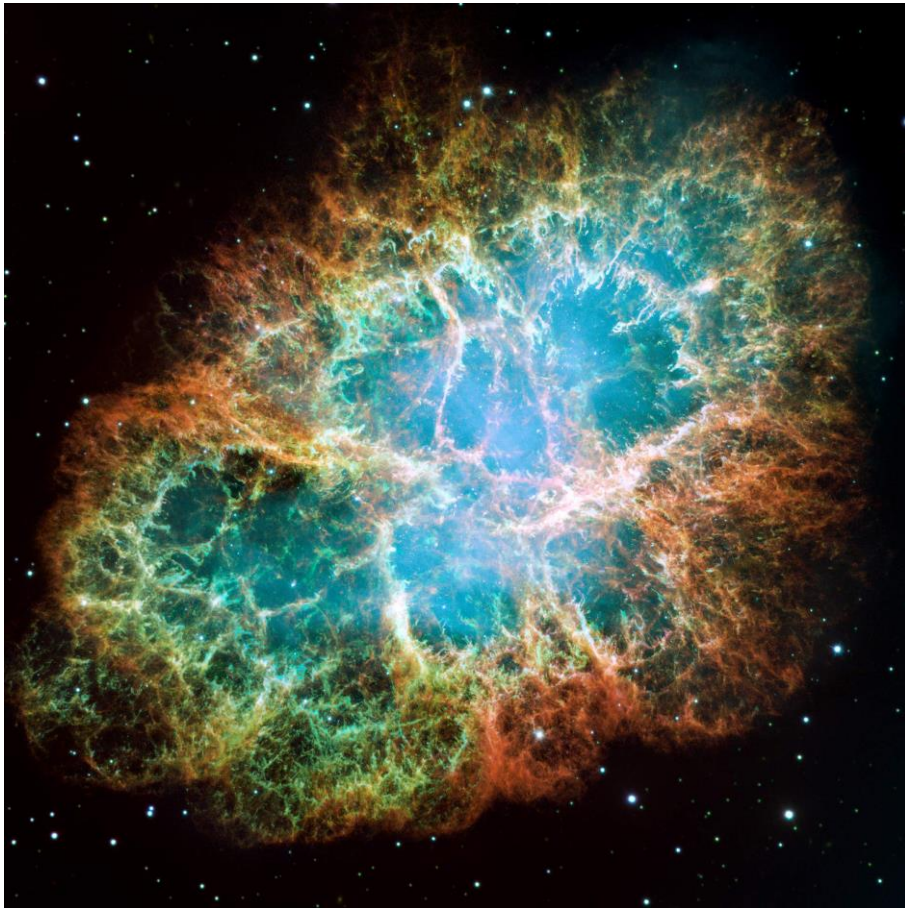
*Изображение взято из Википедии*

# Бессиловые поля

- Состояния Чандрасекара-Кендалла в астрофизической плазме

*Chandrasekhar, S. et al. Ap. J, 1957*

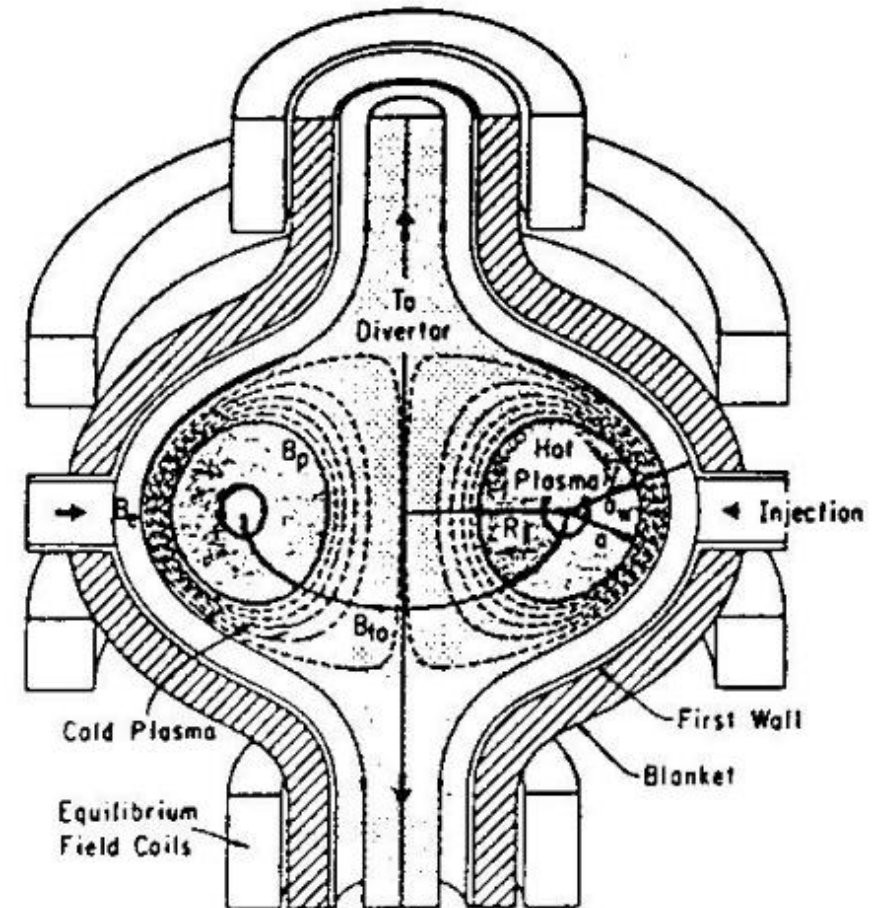
*Piddington, J.H., AJP, 1957*



Изображение взято из Википедии

- Сферомак в термоядерной плазме

*P.M.Bellan, World Scientific, 2000*



Изображение взято из *Bellan, Spherotaks, ICP, 2000*

**Как?**

**Как?**

Используя эффективную теорию Гинзбурга-Ландау

# Феноменологическая модель Гинзбурга - Ландау

Магнитное поле

Сверхпроводящий конденсат

$$\mathcal{F} = \frac{B^2}{8\pi} + |D\psi|^2 + \boxed{\phantom{0}} + \frac{\beta}{2} (\psi^2 - \psi_0^2)^2$$

Кинетический член

где  $B = \nabla \times A$  - магнитное поле,

$D \equiv \nabla - ieA$  - ковариантная производная,

$j = 2e \operatorname{Im}(\psi^* D\psi)$  - сверхток,

$\psi = |\psi|e^{i\varphi}$  - параметр порядка.

# Феноменологическая модель Гинзбурга - Ландау

$$\mathcal{F} = \frac{B^2}{8\pi} + |D\psi|^2 + \gamma(j \cdot B) + \frac{\beta}{2}(\psi^2 - \psi_0^2)^2$$

Магнитное поле

Кинетический член

Сверхток

Сверхпроводящий конденсат

Член Лифшица

- где  $B = \nabla \times A$  - магнитное поле,  
 $D \equiv \nabla - ieA$  - ковариантная производная,  
 $j = 2e \operatorname{Im}(\psi^* D\psi)$  - сверхток,  
 $\psi = |\psi|e^{i\varphi}$  - параметр порядка.

# Феноменологическая модель Гинзбурга - Ландау

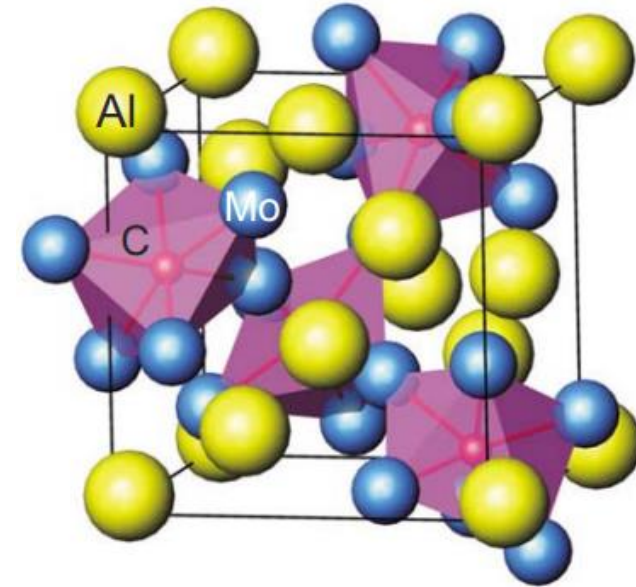
$$\mathcal{F} = \frac{B^2}{8\pi} + |D\psi|^2 + \gamma(j \cdot B) + \frac{\beta}{2}(\psi^2 - \psi_0^2)^2$$

Магнитное поле →  $B^2$   
Кинетический член →  $|D\psi|^2$   
Сверхток →  $\gamma(j \cdot B)$   
Сверхпроводящий конденсат →  $(\psi^2 - \psi_0^2)^2$   
Член Лифшица →  $\gamma(j \cdot B)$

где  $B = \nabla \times A$  - магнитное поле,  
 $D \equiv \nabla - ieA$  - ковариантная производная,  
 $j = 2e \operatorname{Im}(\psi^* D\psi)$  - сверхток,  
 $\psi = |\psi|e^{i\varphi}$  - параметр порядка.

**O** – точечная группа симметрии

Примеры материалов:  $\text{Li}_2\text{Pt}_3\text{B}$  (2K),  $\text{Li}_2\text{Pd}_3\text{B}$  (8K),  $\text{Mo}_3\text{Al}_2\text{C}$  (10K)



Изображение взято из  
Bauer et al. PRB 82, 064511, (2010)

# Компактные бессиловые решения

- Уравнения движения в пределе Лондона  $\nabla_r \times \nabla_r \times \mathbf{j} + \mathbf{j} - 2\Gamma \nabla_r \times \mathbf{j} = 0$   
где  $0 \leq \Gamma = \frac{\gamma}{k\lambda_L} < 1$ ;



# Компактные бессиловые решения

- Уравнения движения в пределе Лондона  $\nabla_r \times \nabla_r \times \mathbf{j} + \mathbf{j} - 2\Gamma \nabla_r \times \mathbf{j} = 0$

где  $0 \leq \Gamma = \frac{\gamma}{k\lambda_L} < 1$ ;

- Вводя оператор  $\mathcal{L}\hat{\mathbf{j}} \equiv \tilde{\nabla} \times \hat{\mathbf{j}} - \eta\hat{\mathbf{j}}$ , где  $\eta = \Gamma + i\sqrt{1 - \Gamma^2}$ ,

уравнения движения принимают форму:

$$\mathcal{L}\mathcal{L}^*\hat{\mathbf{j}} = 0$$

# Компактные бессилловые решения

- Уравнения движения в пределе Лондона  $\nabla_r \times \nabla_r \times j + j - 2\Gamma \nabla_r \times j = 0$   
где  $0 \leq \Gamma = \frac{\gamma}{k\lambda_L} < 1$ ;

- Вводя оператор  $\mathcal{L}\hat{j} \equiv \tilde{\nabla} \times \hat{j} - \eta\hat{j}$ , где  $\eta = \Gamma + i\sqrt{1 - \Gamma^2}$ ,  
уравнения движения принимают форму:

$$\mathcal{L}\mathcal{L}^*\hat{j} = 0$$

- Кроме того, используя комплексное бессилловое поле
  - можно упростить данные уравнения:

$$\mathcal{L}\mathcal{Q} = 0$$

$$\mathcal{L}^*\hat{j} = i\text{Im}(\eta)\mathcal{Q},$$

# Компактные бессиловые решения

- Уравнения движения в пределе Лондона  $\nabla_r \times \nabla_r \times \mathbf{j} + \mathbf{j} - 2\Gamma \nabla_r \times \mathbf{j} = 0$

где  $0 \leq \Gamma = \frac{\gamma}{k\lambda_L} < 1$ ;

- Вводя оператор  $\mathcal{L}\hat{\mathbf{j}} \equiv \tilde{\nabla} \times \hat{\mathbf{j}} - \eta\hat{\mathbf{j}}$ , где  $\eta = \Gamma + i\sqrt{1 - \Gamma^2}$ ,  
уравнения движения принимают форму:

$$\mathcal{L}\mathcal{L}^*\hat{\mathbf{j}} = 0$$

- Кроме того, используя комплексное бессиловое поле

$$\mathcal{L}\mathcal{Q} = 0$$

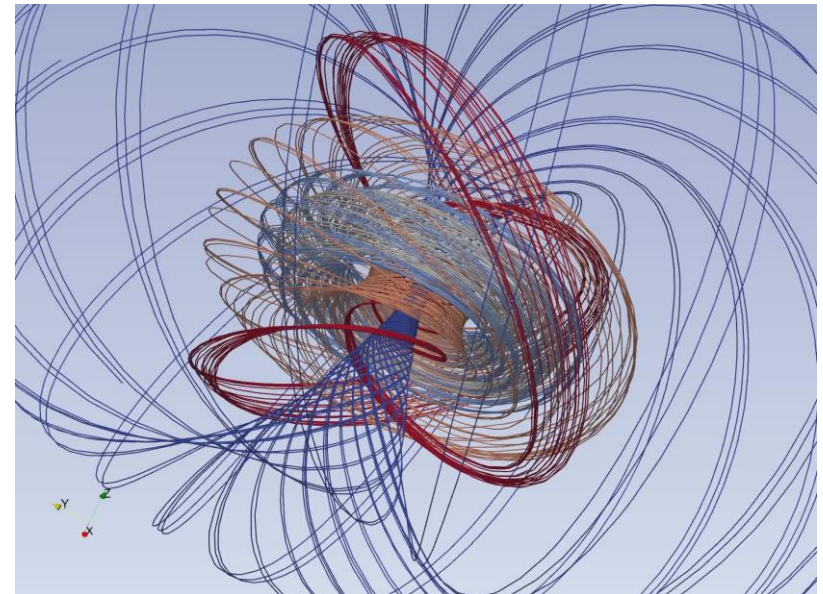
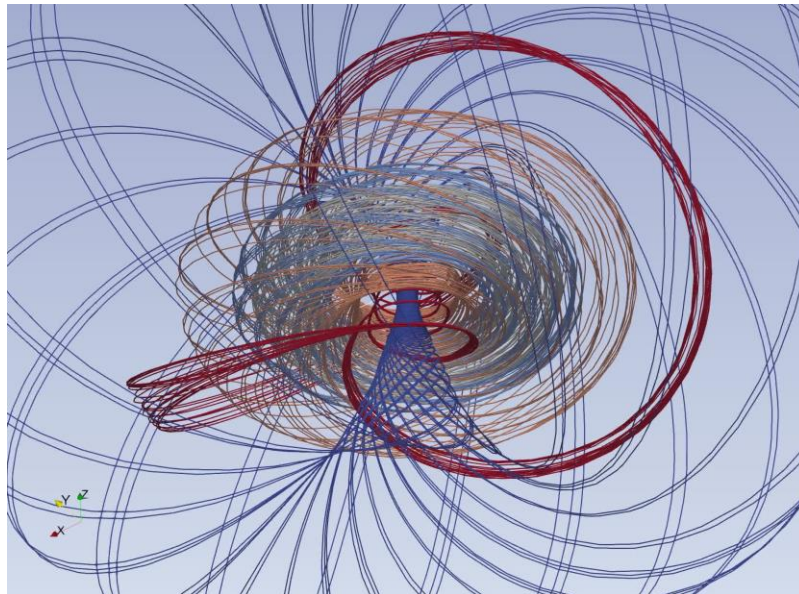
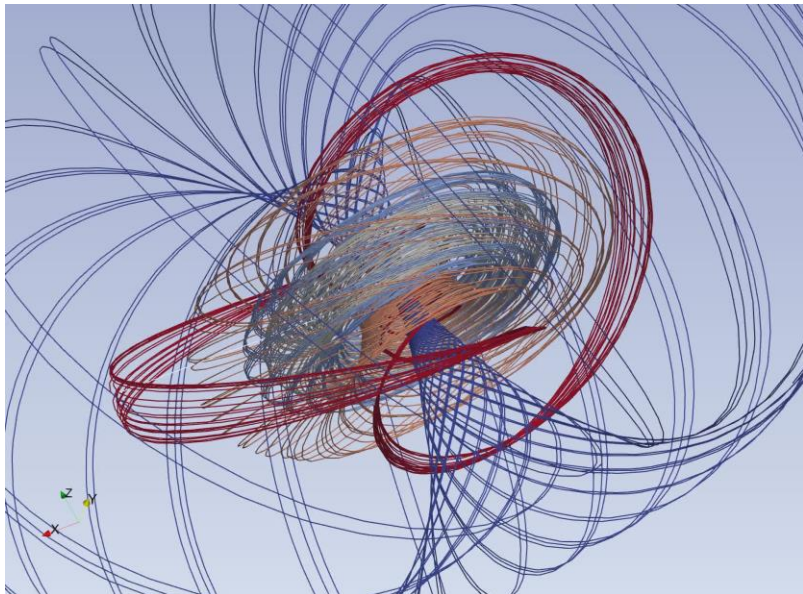
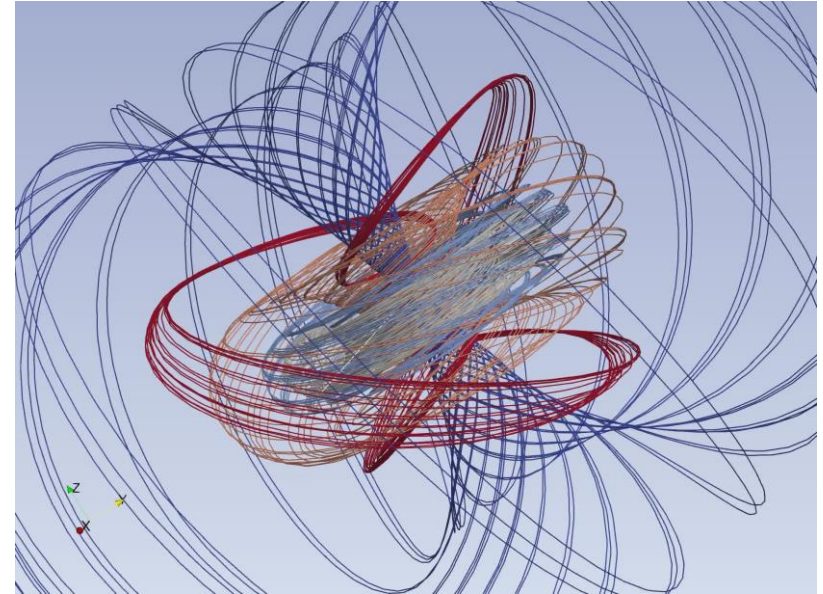
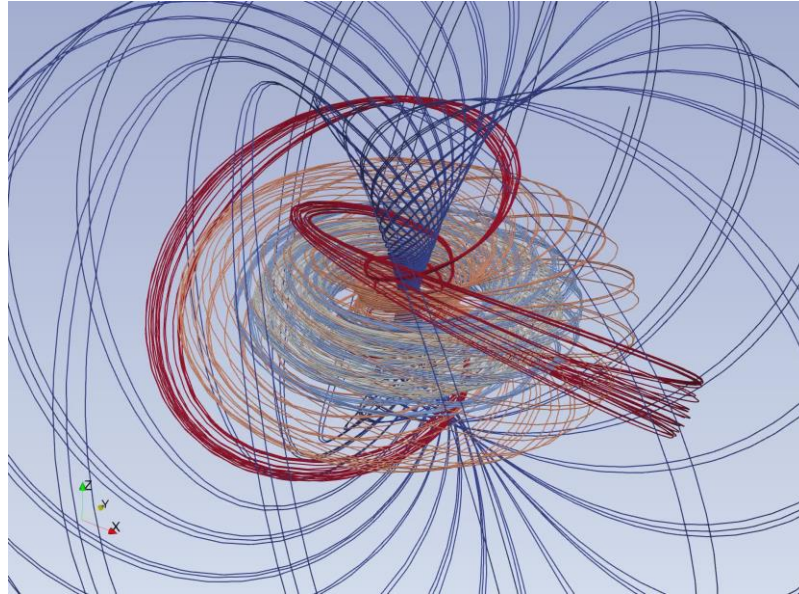
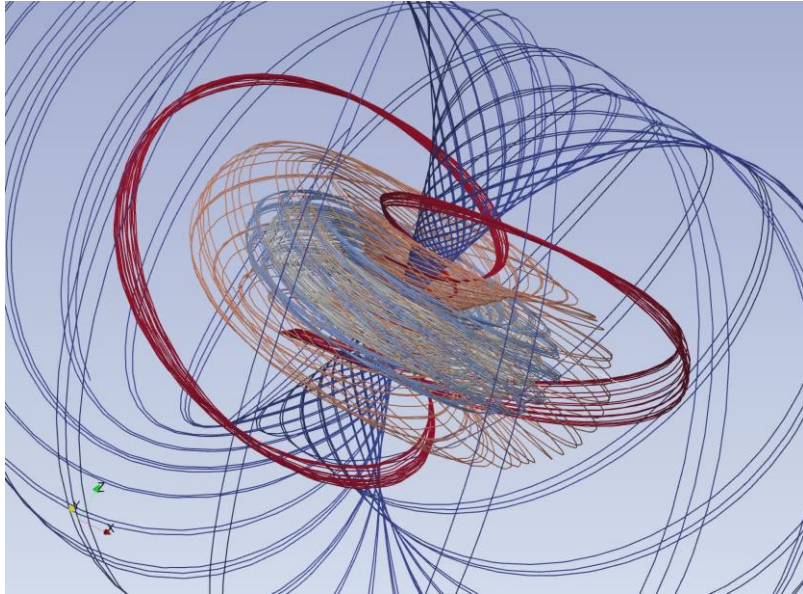
- можно упростить данные уравнения:

$$\mathcal{L}^*\hat{\mathbf{j}} = i\text{Im}(\eta)\mathcal{Q},$$

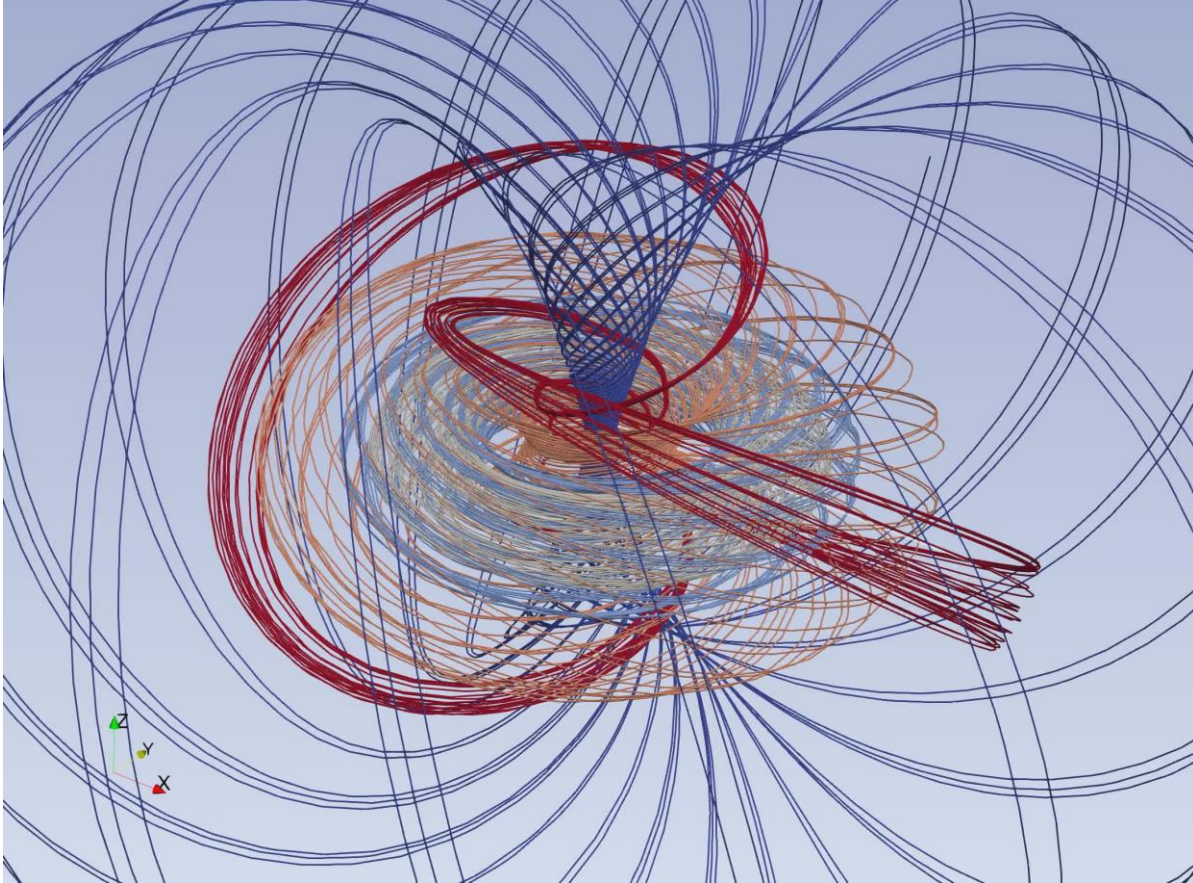
- и определить все физические величины через поле  $\mathcal{Q}$ :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{j}} &= \text{Re}(\mathcal{Q}), & \hat{\mathbf{J}} &= \sqrt{1 - \Gamma^2} \text{Im}(\eta\mathcal{Q}), \\ \mathbf{B} &= -\text{Re}(\eta\mathcal{Q}), & \mathbf{H} &= \sqrt{1 - \Gamma^2} \text{Im}(\mathcal{Q}). \end{aligned}$$

# Распределение сверхтока



# Торофлакс



[Изображение взято из Википедии]

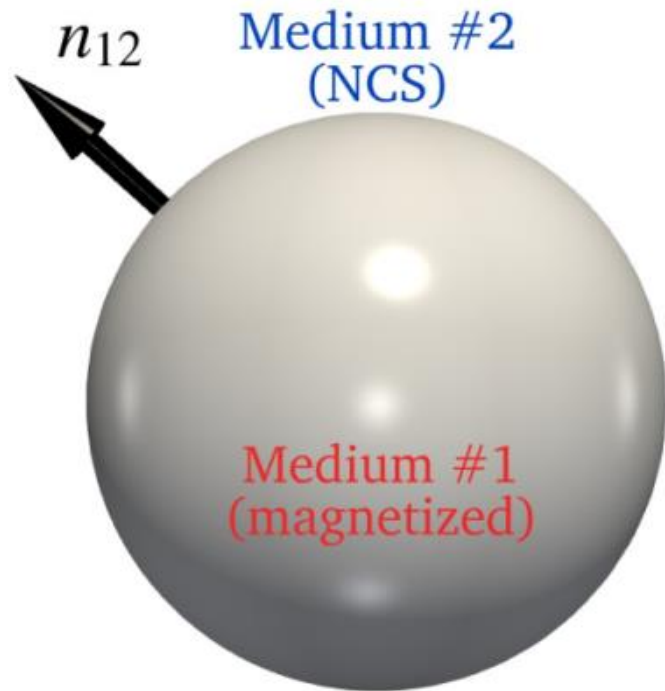
# Торофлакс, индуцированный магнитным диполем

Решение расходится  $\Rightarrow$  **нужна регуляризация**  $Q_{lm}^Y \sim \frac{1}{r^{l+2}}$  ,  $Q_{lm}^\Psi \sim \frac{1}{r^{l+2}}$  ,  $Q_{lm}^\Phi \sim \frac{1}{r^{l+1}}$

# Торофлакс, индуцированный магнитным диполем

Решение расходится  $\Rightarrow$  **нужна регуляризация**  $Q_{lm}^Y \sim \frac{1}{r^{l+2}}$  ,  $Q_{lm}^\Psi \sim \frac{1}{r^{l+2}}$  ,  $Q_{lm}^\Phi \sim \frac{1}{r^{l+1}}$

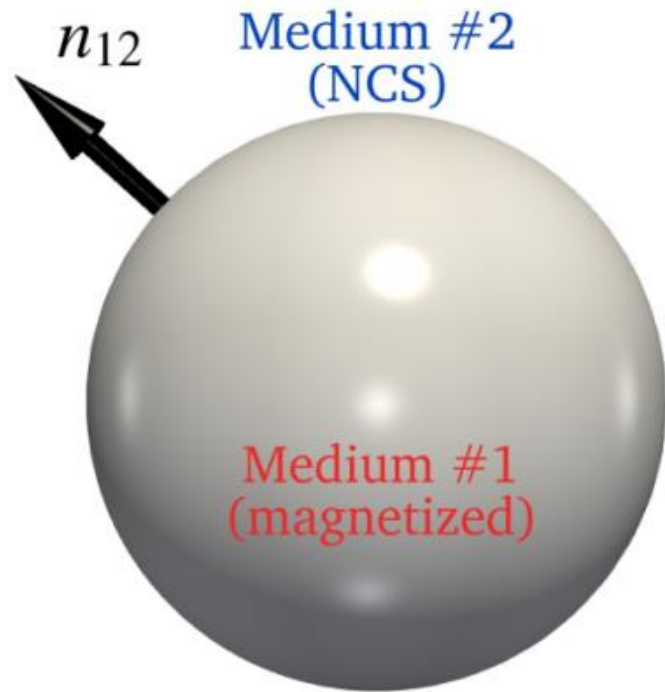
- Сферическое магнитное включение:



# Торофлакс, индуцированный магнитным диполем

Решение расходится  $\Rightarrow$  **нужна регуляризация**  $Q_{lm}^Y \sim \frac{1}{r^{l+2}}$ ,  $Q_{lm}^\Psi \sim \frac{1}{r^{l+2}}$ ,  $Q_{lm}^\Phi \sim \frac{1}{r^{l+1}}$

- Сферическое магнитное включение:



- Граничные условия:

$$0 = \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}_{12} \Big|_{r=r_0},$$

$$0 = \mathbf{n}_{12} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \Big|_{r=r_0},$$

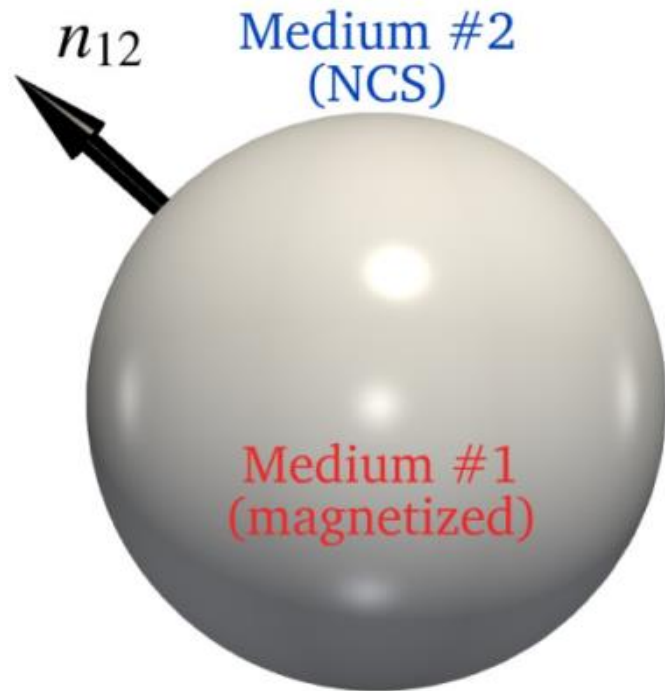
$$\mathbf{J}_S = \mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \Big|_{r=r_0}.$$



# Торофлакс, индуцированный магнитным диполем

Решение расходится  $\Rightarrow$  **нужна регуляризация**  $Q_{lm}^Y \sim \frac{1}{r^{l+2}}$ ,  $Q_{lm}^\Psi \sim \frac{1}{r^{l+2}}$ ,  $Q_{lm}^\Phi \sim \frac{1}{r^{l+1}}$

- Сферическое магнитное включение:

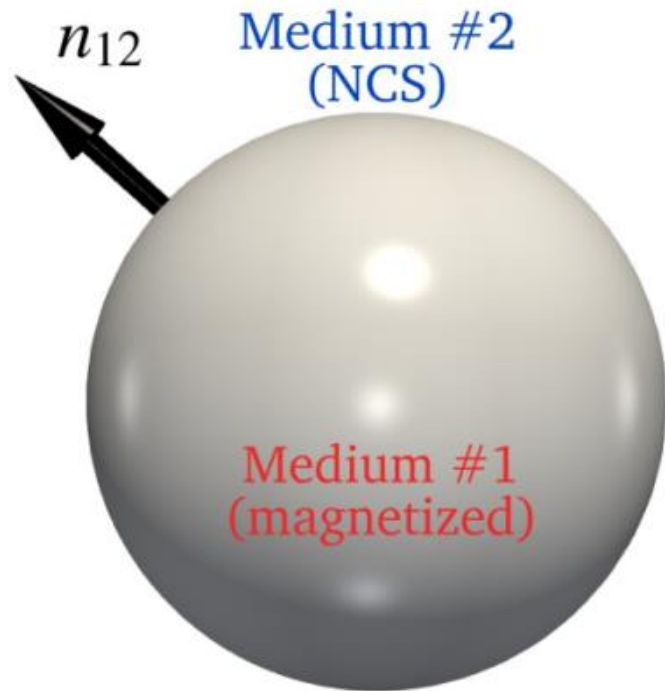


- Граничные условия:  $0 = \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}_{12} \Big|_{r=r_0}$ ,  
 $0 = \mathbf{n}_{12} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \Big|_{r=r_0}$ ,  
 $\mathbf{J}_S = \mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \Big|_{r=r_0}$ .
- Магнитостатические уравнения внутри включения:  $\tilde{\nabla} \times \mathbf{H} = 0$ ,  $\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0$ ,

# Торофлакс, индуцированный магнитным диполем

Решение расходится  $\Rightarrow$  **нужна регуляризация**  $Q_{lm}^Y \sim \frac{1}{r^{l+2}}$ ,  $Q_{lm}^\Psi \sim \frac{1}{r^{l+2}}$ ,  $Q_{lm}^\Phi \sim \frac{1}{r^{l+1}}$

- Сферическое магнитное включение:

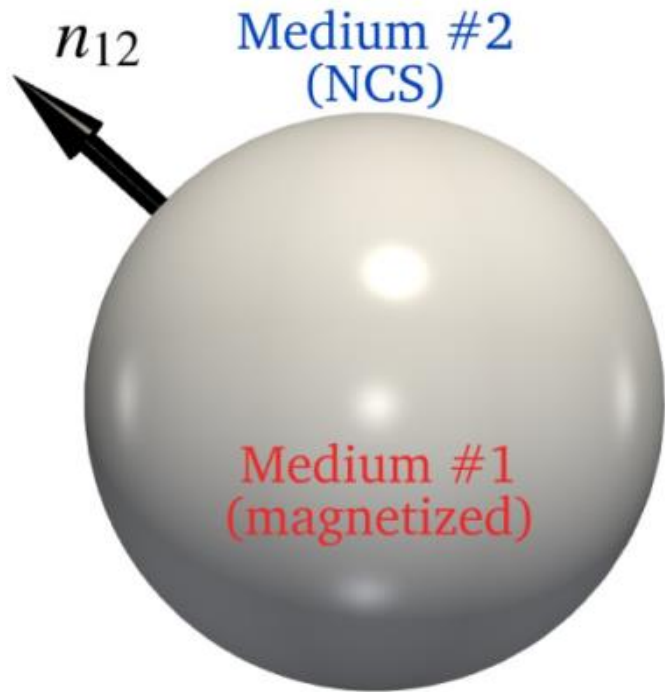


- Граничные условия:  $0 = \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}_{12} \Big|_{r=r_0}$ ,  
 $0 = \mathbf{n}_{12} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \Big|_{r=r_0}$ ,  
 $\mathbf{J}_S = \mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \Big|_{r=r_0}$ .
- Магнитостатические уравнения внутри включения:  $\tilde{\nabla} \times \mathbf{H} = 0$ ,  $\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0$ ,
- Точечный магнитный диполь:  $\check{M} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} M_0 (\mathbf{Y}_{10} + \Psi_{10})$

# Торофлакс, индуцированный магнитным диполем

Решение расходится  $\Rightarrow$  **нужна регуляризация**  $Q_{lm}^Y \sim \frac{1}{r^{l+2}}$ ,  $Q_{lm}^\Psi \sim \frac{1}{r^{l+2}}$ ,  $Q_{lm}^\Phi \sim \frac{1}{r^{l+1}}$

- Сферическое магнитное включение:



- Граничные условия:  $0 = \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}_{12} \Big|_{r=r_0}$ ,  
 $0 = \mathbf{n}_{12} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \Big|_{r=r_0}$ ,  
 $\mathbf{J}_S = \mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \Big|_{r=r_0}$ .
- Магнитостатические уравнения внутри включения:  $\tilde{\nabla} \times \mathbf{H} = 0$ ,  $\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0$ ,
- Точечный магнитный диполь:  $\check{M} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} M_0 (\mathbf{Y}_{10} + \Psi_{10})$

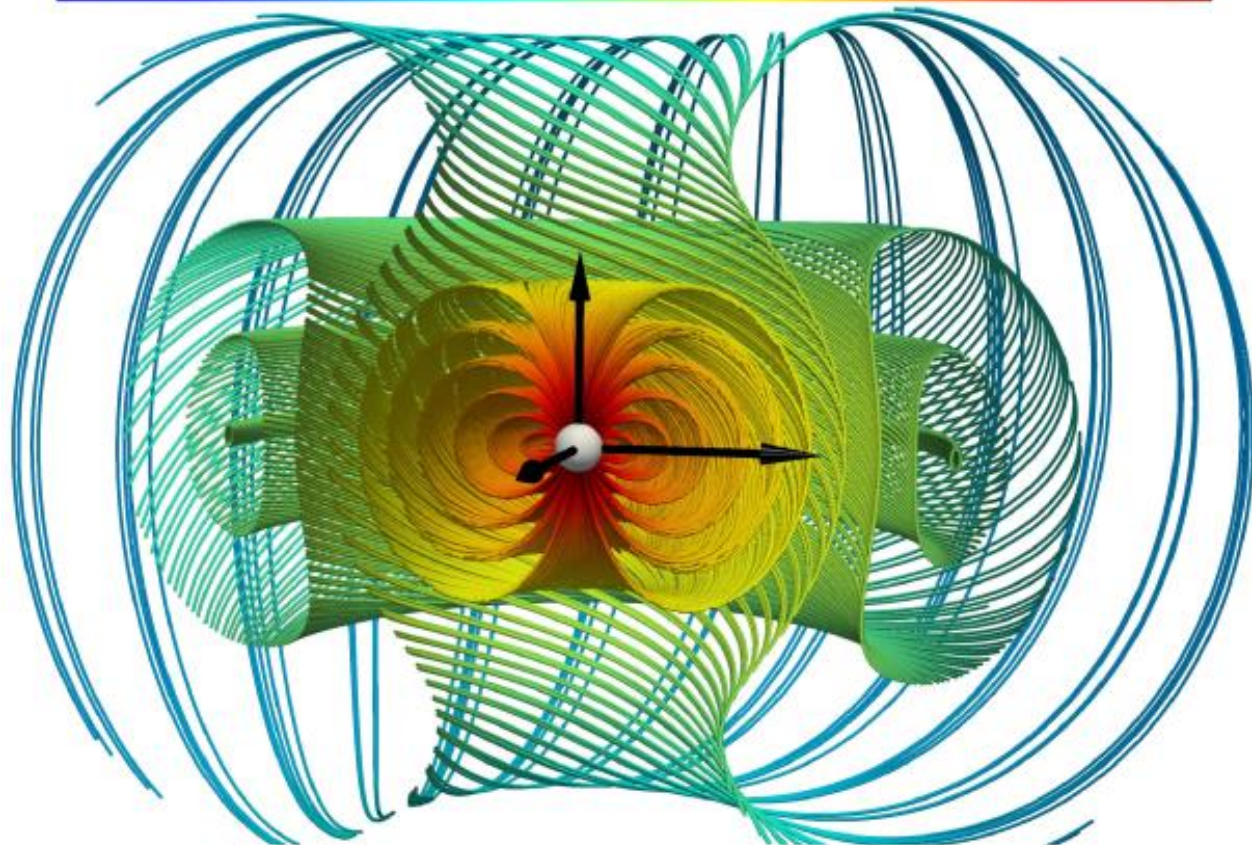
- Явное решение для комплексного бессилового поля  $\mathcal{Q}_{10}$ :

$$\mathcal{Q}_{10} = -M_0^d \frac{e^{i\eta r}}{\eta r^3} \left[ (1 - i\eta r) (2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \eta r \sin \theta \hat{\boldsymbol{\phi}}) + (1 - i\eta r(1 - i\eta r)) \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \right]$$

# Торофлакс, индуцированный магнитным диполем

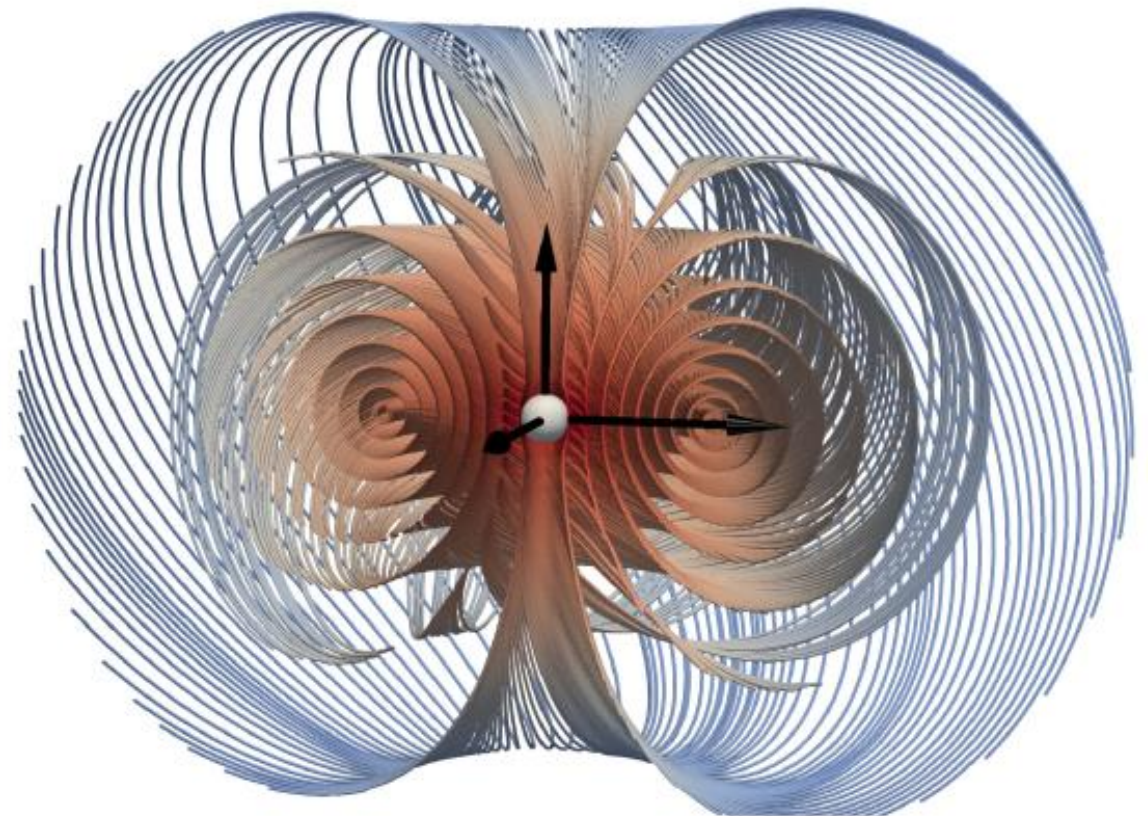
$$|\mathbf{H}|/M_0^d$$

$10^{-5}$   $10^{-4}$   $10^{-3}$   $10^{-2}$   $10^{-1}$   $10^0$



$$|\mathbf{J}|/M_0^d$$

$10^{-4}$   $10^{-3}$   $10^{-2}$   $10^{-1}$



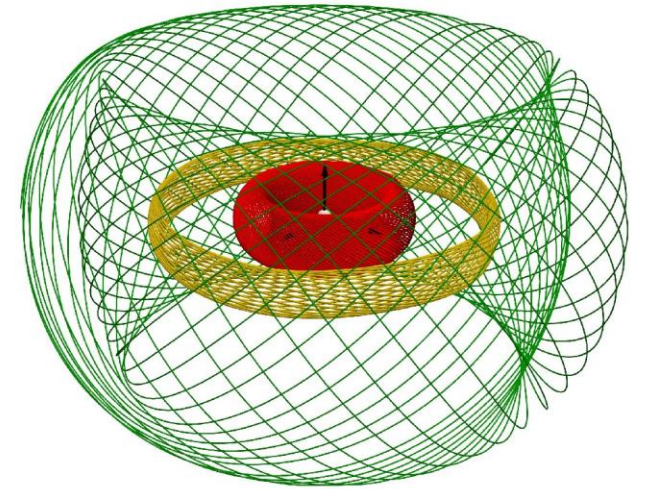
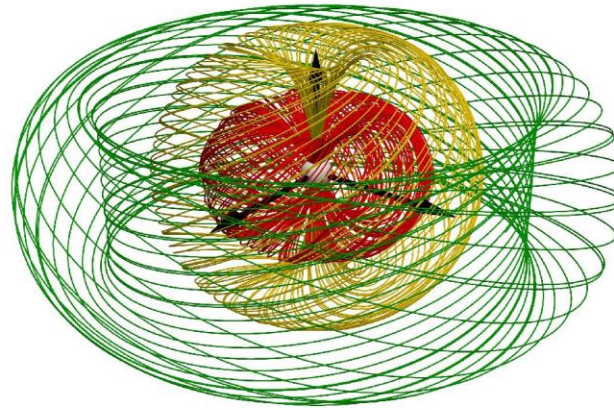
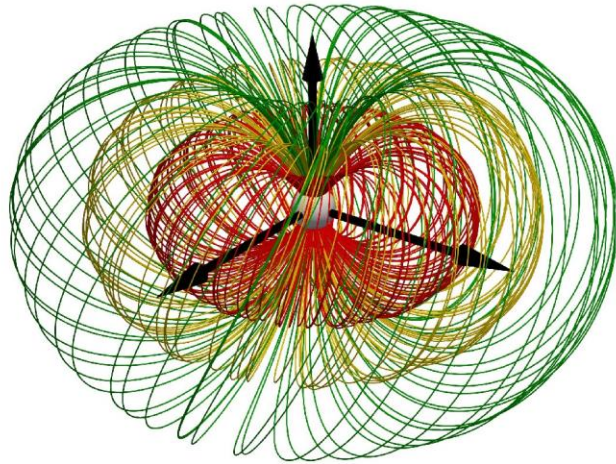
# Торофлакс, индуцированный магнитным диполем

$\Gamma = 0.15$

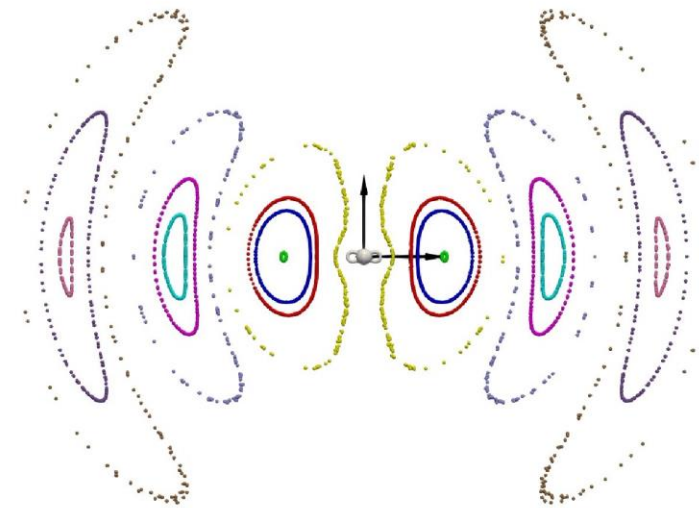
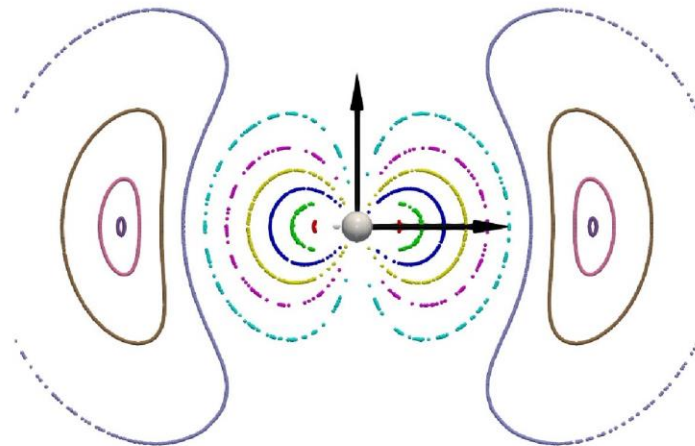
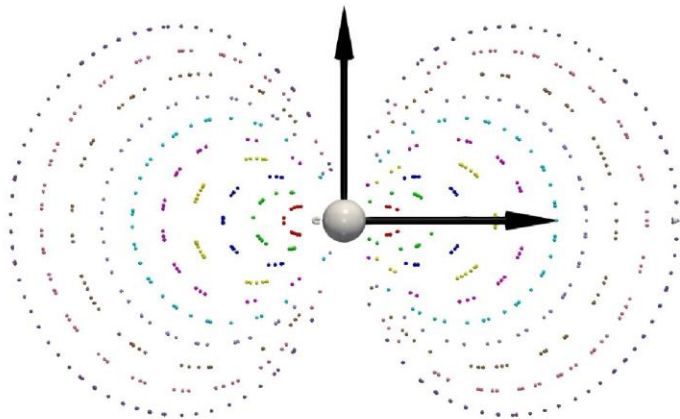
$\Gamma = 0.5$

$\Gamma = 0.95$

$H$



$H|_{x=0}$



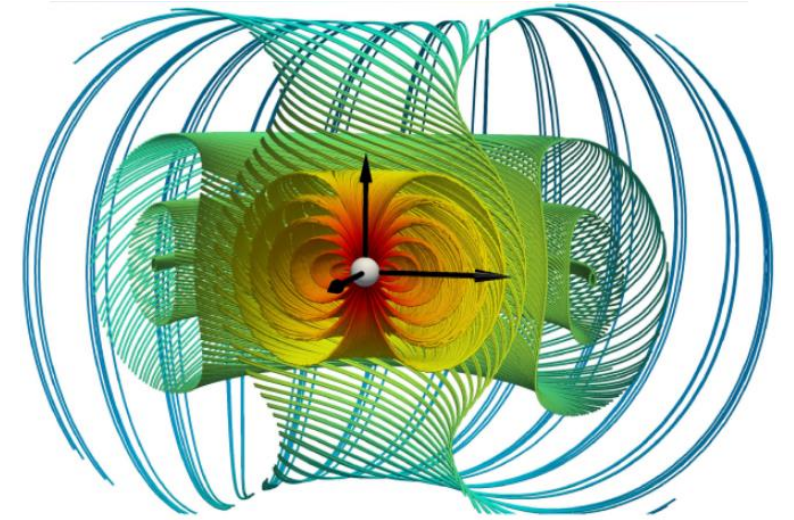
# Результаты

- Было показано, что сверхпроводники с нарушенной симметрией пространственной инверсии обладают стабильными, пространственно локализованными конфигурациями узлового магнитного поля.

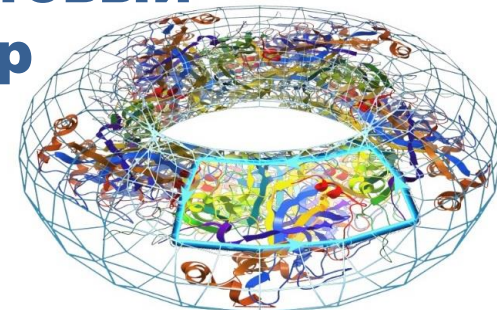
Данные объекты названы «торофлаксом»;

*Garaud J., Korneev A. et al. PRB 108, 014504 (2023)*

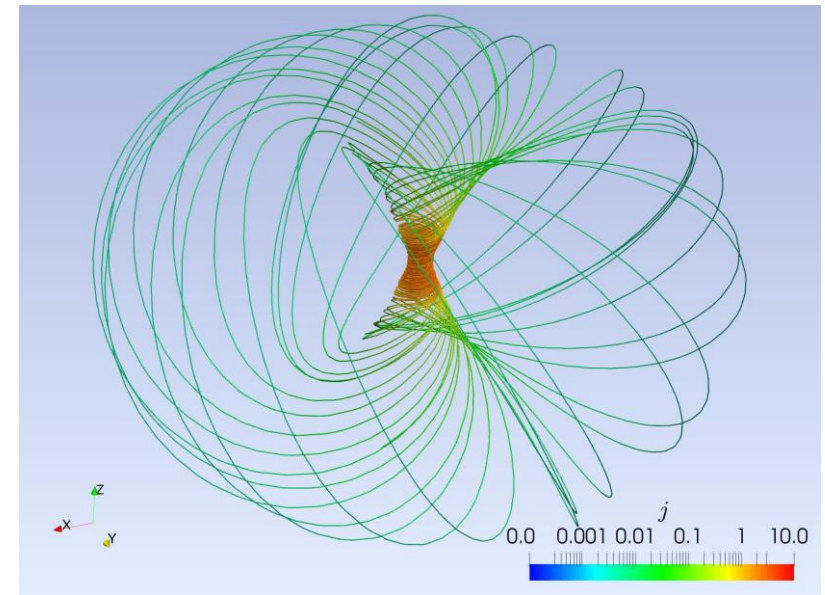
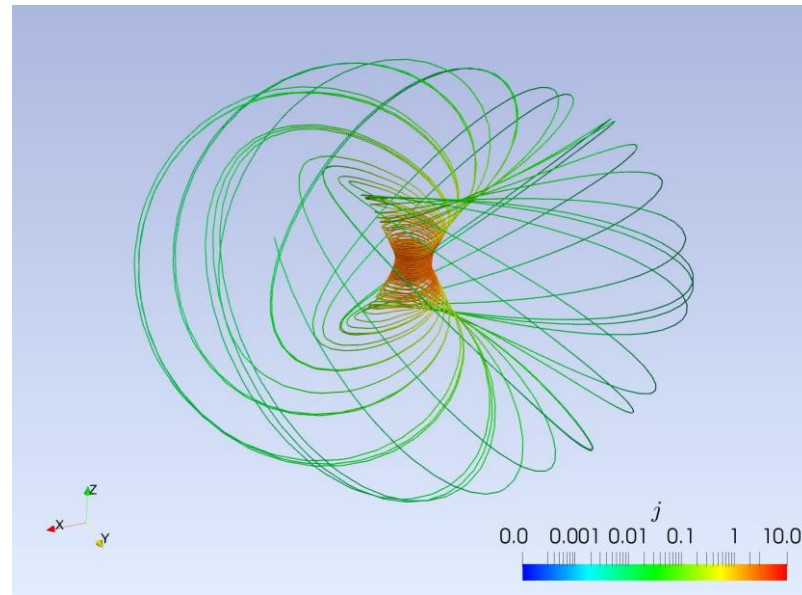
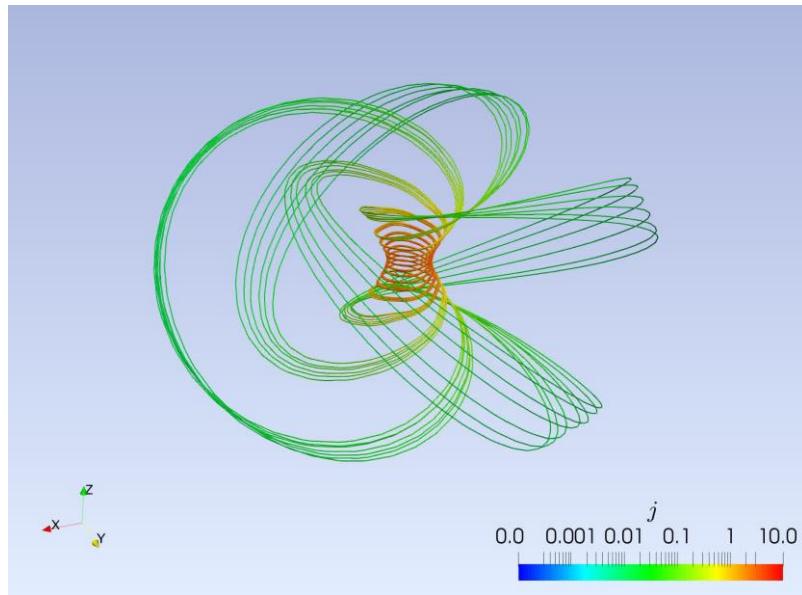
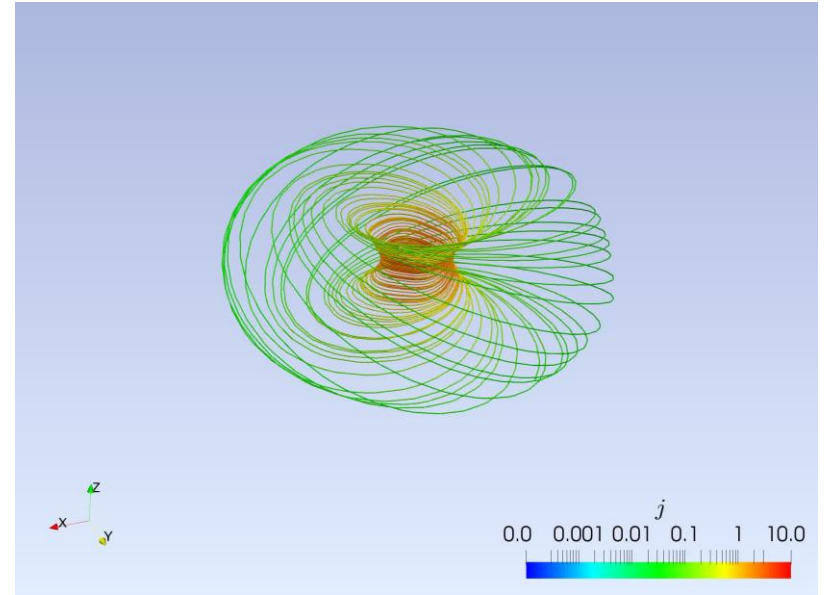
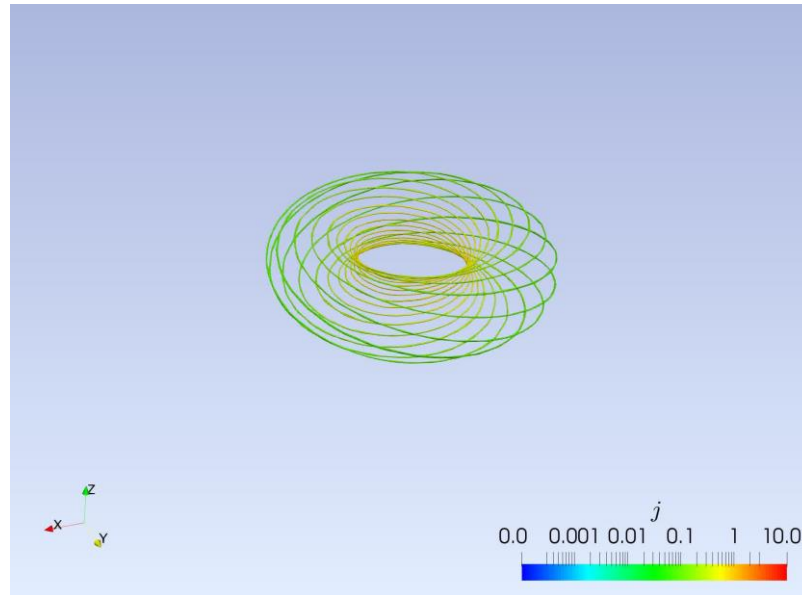
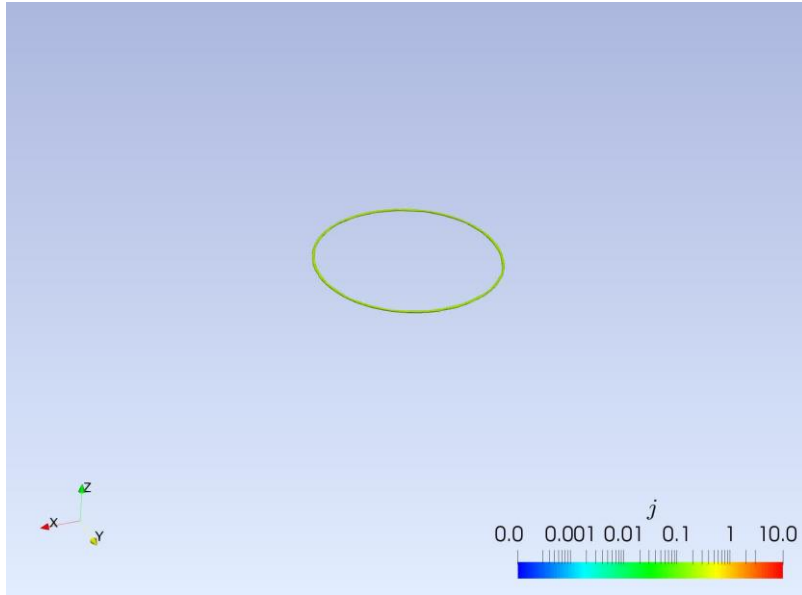
- Продемонстрировано, что ферромагнитное включение в нецентросимметричном сверхпроводнике является источником стабильной узловой конфигурации;
- В явном виде получены решения, наведенные ферромагнитными диполем, и показана зависимость их пространственной структуры от параметра  $\Gamma$ .



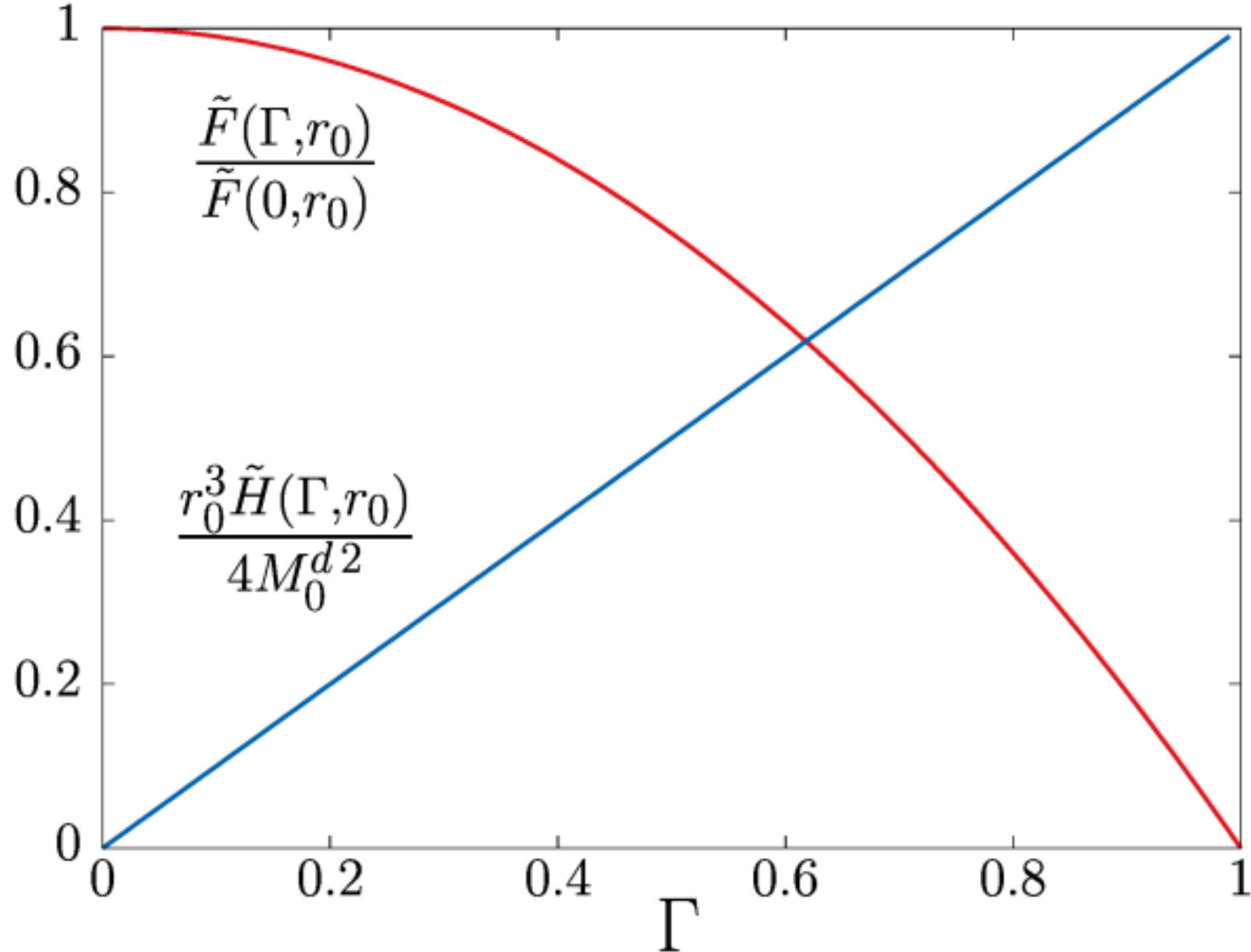
**Тихоокеанский  
Квантовый  
Центр**



# Решение с $l = 1$ , $m = 0$ и $\Gamma = 0.5$ (одиночные линии)



# Энергия и спиральность торофлакса





# Векторные сферические гармоники

- Разложение по базису:

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left( G_{lm}^r(r) \mathbf{Y}_{lm} + G_{lm}^{(1)}(r) \mathbf{\Psi}_{lm} + G_{lm}^{(2)}(r) \mathbf{\Phi}_{lm} \right),$$

- Определение и основные соотношения:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) &= Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}}, & \mathbf{Y}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{\Psi}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) &= 0, \\ \mathbf{\Psi}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) &= r \nabla Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}), & \mathbf{Y}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{\Phi}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) &= 0, \\ \mathbf{\Phi}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) &= \mathbf{r} \times \nabla Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}), & \mathbf{\Psi}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{\Phi}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) &= 0. \end{aligned}$$

- Первые векторные сферические гармоники:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{00} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \hat{\mathbf{r}}, & \mathbf{Y}_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \hat{\mathbf{r}}, & \mathbf{Y}_{11} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{i\phi} \sin \theta \hat{\mathbf{r}}, \\ \mathbf{\Psi}_{00} &= 0, & \mathbf{\Psi}_{10} &= -\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}, & \mathbf{\Psi}_{11} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{i\phi} (\cos \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + i \hat{\boldsymbol{\phi}}), \\ \mathbf{\Phi}_{00} &= 0, & \mathbf{\Phi}_{10} &= -\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin \theta \hat{\boldsymbol{\phi}}, & \mathbf{\Phi}_{11} &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{i\phi} (i \hat{\boldsymbol{\theta}} - \cos \theta \hat{\boldsymbol{\phi}}). \end{aligned}$$