Спектр локализованных возмущений электромагнитного поля на векторном солитоне

Юлия Галушкина[1],**Эдуард Ким**[1,2], Эмин Нугаев [1], Яков Шнир [3]

[1]Институт ядерных исследований РАН

[2]Московский физико-технический институт

[3]Объединенный институт ядерных исследований

arXiv: 2411.13514

Сессия-конференция секции ядерной физики Отделения физических наук Российской академии наук, посвящённая 70-летию В.А. Рубакова, Президиум РАН, 17—21 февраля 2025 г.

Модель векторных солитонов

Рассмотрим теорию массивного нейтрального поля V^μ, взаимодействующего неминимальным образом с электромагнитным полем, в $(3+1)$ измерениях

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}V^*_{\mu\nu}V^{\mu\nu} + \frac{i\gamma}{2}F_{\mu\nu}W^{\mu\nu} - U(V^\nu, V^{*\mu}),$$

где $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, $V_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu$ и $W_{\mu\nu} = V^*_\mu V_\nu - V^*_\nu V_\mu$. Потребуем чтобы модель обладала P-четностью, а также была $U_g(1)$-инвариантной. Самый общий вид потенциала без дополнительных размерных параметров, удовлетворяющего этим условиям, записывается как

$$U = -M^2 V^*_\mu V^\mu - \frac{\alpha}{2}(V^*_\mu V^\mu)^2 - \frac{\beta}{2}(V^*_\mu V^{*\mu})(V_\nu V^\nu).$$

Особенность неминимального взаимодействия с электромагнитным полем раскрывается на уравнениях движения

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = i\gamma\partial_\mu W^{\mu\nu}.$$

Для локализованных решений с тривиальными граничными условиями на пространственной бесконечности это уравнение можно проинтегрировать и получить следующее равенство

$$F^{\mu\nu} = i\gamma W^{\mu\nu}.$$

Отынтегрировав таким образом поле $F^{\mu\nu}$, можно записать лагранжиан эффективной теории как

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}V^*_{\mu\nu}V^{\mu\nu} - \tilde{U}(V^\nu, V^{*\mu}) \ ,$$

$$\tilde{U} = -M^2 V^*_\mu V^\mu - \frac{\tilde{\alpha}}{2}(V^*_\mu V^\mu)^2 - \frac{\tilde{\beta}}{2}(V^*_\mu V^{*\mu})(V_\nu V^\nu) \ ,$$

где $\tilde{\alpha} = \alpha + \gamma^2$ и $\tilde{\beta} = \beta - \gamma^2$.

- Заряд глобальной симметрии $U_g(1)$

$$Q = \frac{8\pi}{\tilde{\alpha}} \int_0^\infty v(\mathrm{w} v - u')r^2\, dr.$$

- Топологический ток

$$j_T^\nu = i\partial_\mu W^{\mu\nu}\ .$$

Масса солитона:

$$E = \frac{4\pi M}{\tilde{\alpha}} \int_0^\infty \Big((\mathrm{w} v - u')^2 + (u^2 + v^2) + \frac{1}{2}(u^2 - v^2)(3u^2 + v^2) +$$
$$+ \frac{\kappa}{2}(u^2 + v^2)(3u^2 - v^2) \Big) r^2\, dr.$$

Удобно ввести безразмерные параметры

$$V^\nu = \frac{M\tilde{V}^\nu}{\sqrt{\tilde{\alpha}}}\ ,\ \ \kappa = \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}\ ,\ \ x_i x^i = \frac{r^2}{M^2}\ ,\ \ t = \frac{\tau}{M}\ .$$

Будем рассматривать сферически-симметричные решения вида

$$\tilde{V}_0 = iu(r)e^{-i\mathrm{w}\tau}\ ,\ \ \tilde{V}^i = \frac{\tilde{x}^i}{r}v(r)e^{-i\mathrm{w}\tau},$$

где $\tilde{x}^i = Mx^i$, а w-свободный параметр теории ($\mathrm{w} < 1$ для солитонов).
Уравнения движения для сферически-симметричных решений

$$u'' + \frac{2}{r}u' - \mathrm{w}(v' + \frac{2}{r}v) - u - (u^2 - v^2)u - \kappa(u^2 + v^2)u = 0\ ,$$
$$\mathrm{w}u' + (1 - \mathrm{w}^2)v + (u^2 - v^2)v - \kappa(u^2 + v^2)v = 0\ .$$

Уравнение связи можно переписать, тогда получится

$$v' = \frac{\mathrm{w}\left(-\frac{2}{\mathrm{w}}(1-\kappa)\mathrm{u}\mathrm{u}'\mathrm{v} + \frac{2(\mathrm{u}'-\mathrm{w}\mathrm{v})}{\mathrm{r}} - \mathrm{u} - \mathrm{u}(\mathrm{u}^2 - \mathrm{v}^2) - \kappa\mathrm{u}(\mathrm{u}^2+\mathrm{v}^2)\right)}{1 + (u^2 - v^2) - \kappa(u^2 + v^2) - 2v^2(1+\kappa)}$$

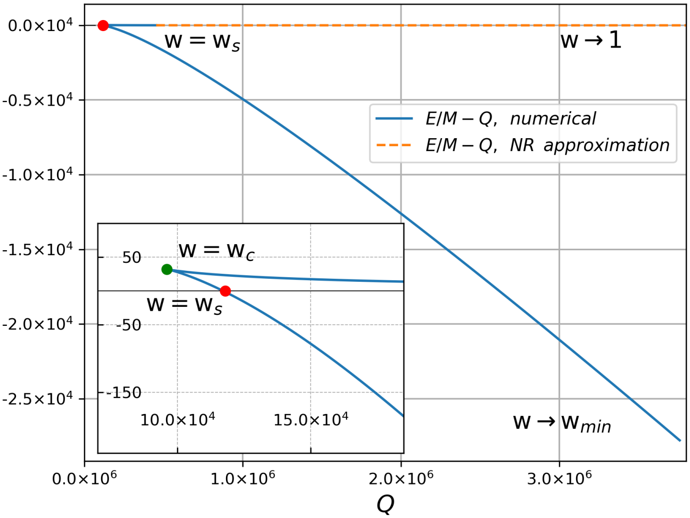


Рис. 1: Интегральная характеристика $E/M - Q$ в зависимости от заряда Q. Здесь и далее параметры теории $\tilde{\alpha} = 1$, $k = \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}} = -0.9$.

Вибрационные моды

Рассмотрим возмущения полей в нашей модели

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \tilde{F}^{\mu\nu}_b + \tilde{F}^{\mu\nu}_p, \quad \tilde{V}^{\mu} = \tilde{V}^{\mu}_b + \tilde{V}^{\mu}_p,$$

где $\tilde{F}^{\mu\nu} = (\sqrt{\tilde{\alpha}}/M^2)F^{\mu\nu}$. После линеаризации уравнение на $F^{\mu\nu}_p$ можно также использовать для отынтегрирования возмущений электромагнитного поля в силу

$$\tilde{F}^{\mu\nu}_p = \frac{\mathrm{i}\gamma}{\sqrt{\tilde{\alpha}}}(\tilde{V}^{*\mu}_b \tilde{V}^{\nu}_p - \tilde{V}^{*\nu}_p \tilde{V}^{\mu}_b) + \frac{\mathrm{i}\gamma}{\sqrt{\tilde{\alpha}}}(\tilde{V}^{*\mu}_p \tilde{V}^{\nu}_b - \tilde{V}^{*\nu}_b \tilde{V}^{\mu}_p) \,.$$

Для сферически-симметричных возмущений можно написать анзац (Anderson, Derrick, 1970)

$$\tilde{V}^0_p = ie^{-i\mathrm{w}\tau}(\chi_1(r)e^{-i\lambda\tau} + \chi_2(r)e^{i\lambda\tau}),$$

$$\tilde{V}^i_p = \frac{\tilde{x}^i}{r}e^{-i\mathrm{w}\tau}(\phi_1(r)e^{-i\lambda\tau} + \phi_2(r)e^{i\lambda\tau}),$$

где λ-частота соответствующих мод. Условие локализации вибрационных мод: $|\lambda| < 1 - \mathrm{w}$.

Численный анализ линеаризованных уравнений движения для возмущений векторного поля над солитоном позволяет найти профили линейных возмущений и спектр вибрационных мод.

$$\chi_1'' + \frac{2}{r}\chi_1' - (\mathrm{w}+\lambda)(\phi_1' + \frac{2}{r}\phi_1) - \chi_1 -$$
$$- [(2u^2 - v^2)\chi_1 - uv\phi_1 + u^2\chi_2 - uv\phi_2] -$$
$$- \kappa[(u^2+v^2)\chi_2 + 2(u^2\chi_1 + uv\phi_1)] = 0 \ ,$$

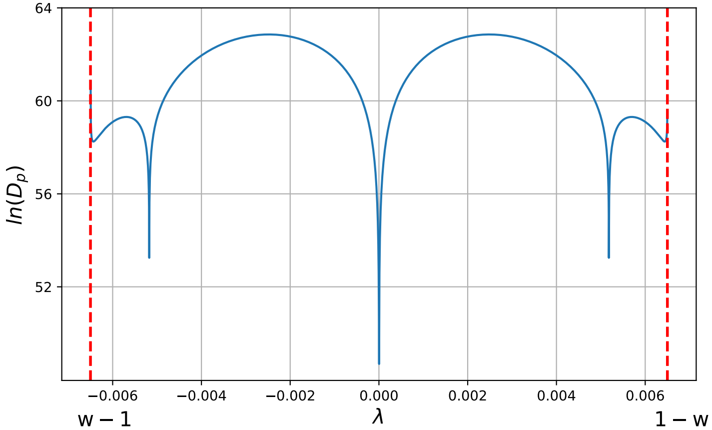
$$(\mathrm{w}+\lambda)\chi_1' + (1 - (\mathrm{w}+\lambda)^2)\phi_1 +$$
$$+ [(u^2 - 2v^2)\phi_1 + uv\chi_1 + uv\chi_2 - v^2\phi_2] -$$
$$- \kappa[(u^2+v^2)\phi_2 + 2(uv\chi_1 + v^2\phi_1)] = 0 \ ,$$

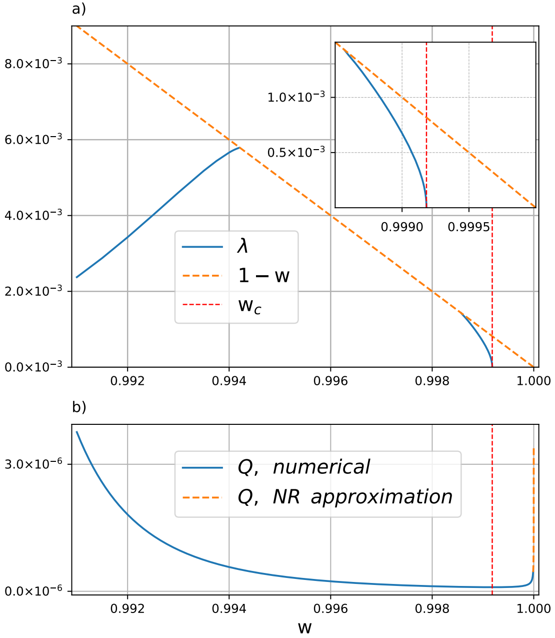
$$\chi_2'' + \frac{2}{r}\chi_2' - (\mathrm{w}-\lambda)(\phi_2' + \frac{2}{r}\phi_2) - \chi_2 -$$
$$- [(2u^2 - v^2)\chi_2 - uv\phi_2 + u^2\chi_1 - uv\phi_1] -$$
$$- \kappa[(u^2+v^2)\chi_1 + 2(u^2\chi_2 + uv\phi_2)] = 0 \ ,$$

$$(\mathrm{w}-\lambda)\chi_2' + (1 - (\mathrm{w}-\lambda)^2)\phi_2 +$$
$$+ [(u^2 - 2v^2)\phi_2 + uv\chi_2 + uv\chi_1 - v^2\phi_1] -$$
$$- \kappa[(u^2+v^2)\phi_1 + 2(uv\chi_2 + v^2\phi_2)] = 0 \ .$$

Сканирование по λ

Нулевая мода. Поиск вибрационных мод.





Делокализация вибрационных мод. Критерий стабильности Вахитова-Колоколова $\frac{dQ}{d\mathrm{w}} < 0$.

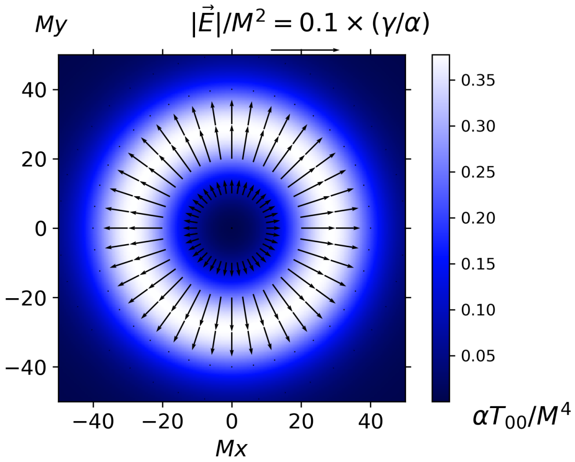
Электрическое поле

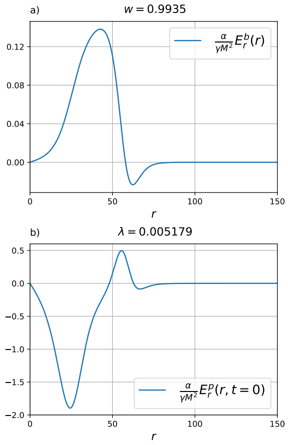
Используя условие отынтегрирования $F^{\mu\nu}$ можно восстановить вид электрического поля солитона. Такую же процедуру можно проделать и для возмущений полей.

$$E_r^b(r) = -\frac{2M^2\gamma}{\tilde{\alpha}} u(r)v(r)$$

$$E_r^p(r,t) = -\frac{2M^2\gamma}{\tilde{\alpha}} \left[u(r)\cdot(\phi_1(r)+\phi_2(r))+v(r)\cdot(\chi_1(r)+\chi_2(r)) \right] cos(\lambda M t)$$

Структура электромагнитного поля





Заключение

- Проведён численный анализ сферически-симметричных вибрационных мод линейных возмущений над нетопологическим векторным солитоном;
- Найденный прерывистый спектр вибрационных мод согласуется с критерием стабильности Вахитова-Колоколова.

Спасибо за внимание!