

Топологические объекты в ранней вселенной

Михаил С. Волков

Институт Пуассона,
Турский университет, Тур, Франция

Школа по физике элементарных частиц
и космологии им. В.А. Рубакова
7-11 июля 2025

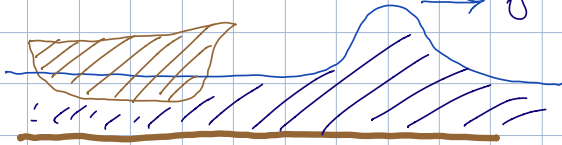
Солитоны = устойчивые сгустки
энергии, описываемые решениями
нелинейных уравнений

Солитоны в нерелятивистской физике



Начало систематического изучения солитонов

Релевационская физика:
удерживаемая волна в мелком
канале = солитон $\rightarrow \vec{v}$



John Scott Russel, 1830

Релевационская физика,
первый солитон в теории поля:

Tony Skyrme, 1961

Солитоны в релятивистской физике

- Солитоны в теориях скалярного поля: кинки, текстуры, скирмионы, узлы, Q -шары, аномальные солитоны
- Солитоны в калибровочных теориях поля: магнитные вихри, вортонны, магнитные монополи
- Электрослабые дефекты: струны, монополи, сфалероны

Литература

- [1] Р.Раджараман, Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля. Мир 1985
- [2] В.А.Рубаков, Классические калибровочные поля. Бозонные теории. Либроком 2015
- [3] N.Manton, P.Sutcliffe. Topological solitons. Cambridge 2004.
- [4] E.Radu, M.S.Volkov, Stationary ring solitons in field theory – knots and vortons. Physics Reports 468 (2008) 101.

Солитоны в $1+1$ измерениях
Кинки и доменные стенки

Кинки и доменные стенки

Простейшие солитоны возникают в теории вещественного скалярного поля, зависящего от двух координат, $\phi(x^0, x^1) \equiv \phi(t, x)$. Координаты покрывают двумерное пространство Минковского с метрикой

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dt^2 - dx^2 \quad \Rightarrow \quad g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Теория определяется действием

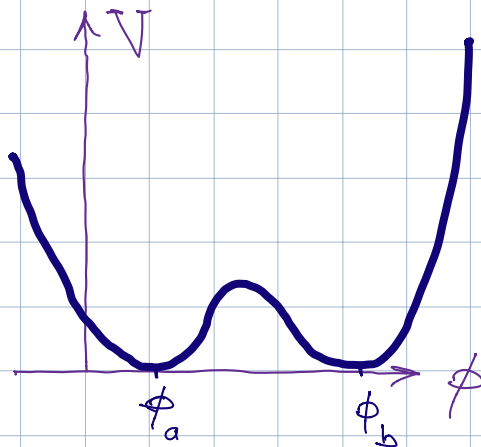
$$S = \int \mathcal{L} \sqrt{|g|} d^2x,$$

с плотностью Лагранжиана

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \equiv \frac{1}{2} (\dot{\phi}^2 - \phi'^2) - V(\phi)$$

с потенциалом $V(\phi) \geq 0$ который везде положителен, за исключением двух точек, $V(\phi_a) = V(\phi_b) = 0$.

Потенциал $V(\phi)$



Уравнение движения

Вариация действия даёт уравнение поля

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L} \sqrt{|g|}}{\partial \partial_\mu \phi} \right) - \frac{\partial \mathcal{L} \sqrt{|g|}}{\partial \phi} = 0,$$

которое принимает форму

$$\ddot{\phi} - \phi'' + \frac{dV(\phi)}{d\phi} \equiv \square \phi + \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0.$$

Тензор энергии-импульса

$$T_{\mu\nu} = 2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} - \mathcal{L} g_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \mathcal{L} g_{\mu\nu}$$

определяет энергию поля:

$$E = \int T_{00} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} \phi'^2 + V(\phi) \right) dx$$

Статическое поле $\phi = \phi(x)$

определяет **отображение** $\phi(x) : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$. Энергия

$$E[\phi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \phi'^2 + V(\phi) \right) dx$$

будет конечна при условии

$$\phi' \rightarrow 0, \quad V(\phi) \rightarrow 0 \quad \text{когда} \quad x \rightarrow \pm\infty,$$

следовательно, поскольку $V(\phi_a) = V(\phi_b) = 0$, нужно

$$\phi \rightarrow \phi_a \quad \text{или} \quad \phi \rightarrow \phi_b \quad \text{когда} \quad x \rightarrow \pm\infty.$$

Это определяет 4 возможности при $-\infty \leftarrow x \rightarrow \infty$:

$$\text{I :} \quad \phi_a \leftarrow \phi(x) \rightarrow \phi_a$$

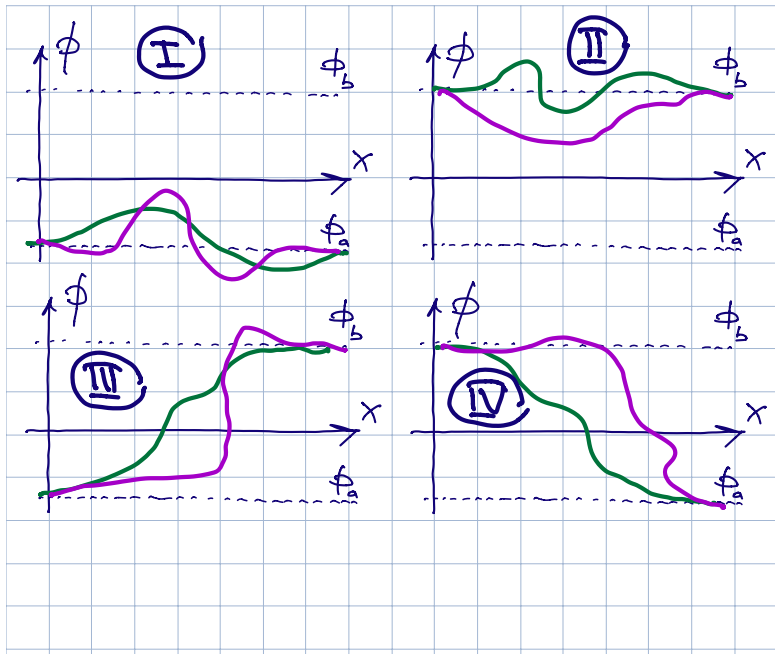
$$\text{II :} \quad \phi_b \leftarrow \phi(x) \rightarrow \phi_b$$

$$\text{III :} \quad \phi_a \leftarrow \phi(x) \rightarrow \phi_b$$

$$\text{IV :} \quad \phi_b \leftarrow \phi(x) \rightarrow \phi_a$$

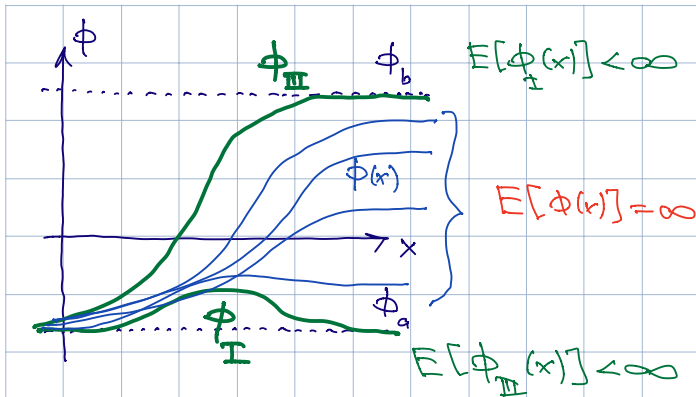
что соответствует четырём **гомотопическим классам**

4 типа поведения поля с конечной энергией



- Определение: отображения $\phi_1(x)$ and $\phi_2(x)$ принадлежат одному гомотопическому классу если они могут быть сведены одно к другому непрерывными деформациями, не меняющими граничных условий.
- Граничные условия I, II, III, IV определяют четыре гомотопических класса, соответствующих четырём **топологическим секторам** теории.
- Если $\phi_1(x)$ и $\phi_2(x)$ принадлежат разным гомотопическим классам, например $\phi_1(x) \in \text{I}$ и $\phi_2(x) \in \text{III}$, тогда чтобы деформировать $\phi_1(x)$ в $\phi_2(x)$ необходимо менять граничное условие на бесконечности, что вызывает расходимость энергии (см. картинку).

Выход за пределы гомотопического класса вызывает расходимость энергии



Внутри каждого топологического сектора
энергия конечна. Разные секторы
разделены бесконечно высоким потенциальным
барьером.

Предел Богомольного

В каждом топологическом секторе энергия ограничена снизу:

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \phi'^2 + V(\phi) \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} \left(\phi' \mp \sqrt{2V(\phi)} \right)^2 \pm \phi' \sqrt{2V(\phi)} \right\} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\phi' \mp \sqrt{2V(\phi)} \right)^2 dx + E_{\min} \geq E_{\min}. \end{aligned}$$

Минимальное значение

$$E_{\min} = W[\phi(\infty)] - W[\phi(-\infty)] \quad \text{with} \quad W[\phi] = \pm \int \sqrt{2V(\phi)} d\phi$$

определяется только граничными условиями на бесконечности, которые выражаются через **топологический заряд**:

$$Q = \frac{\phi(\infty) - \phi(-\infty)}{\phi_b - \phi_a} \Rightarrow Q_I = Q_{II} = 0, \quad Q_{III} = 1, \quad Q_{IV} = -1.$$

Уравнение Богомольного

Минимальное значение энергии $E = E_{\min}[Q]$ достигается если

$$\phi' = \pm \sqrt{2V(\phi)}. \quad (\star)$$

В секторах I и II, где $Q = 0$, решение тривиально:

$$\text{I: } \phi(x) = \phi_a \quad \text{II: } \phi(x) = \phi_b \quad \Rightarrow \quad E_{\min}[0] = 0.$$

В секторе III, где $Q = 1$, выбираем верхний знак в $(\star)$, тогда

$$\int_{\phi_0}^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{2V(\phi)}} = x - x_0, \quad E_{\min}[1] = W[\phi_b] - W[\phi_a] \equiv E_{\text{kink}}$$

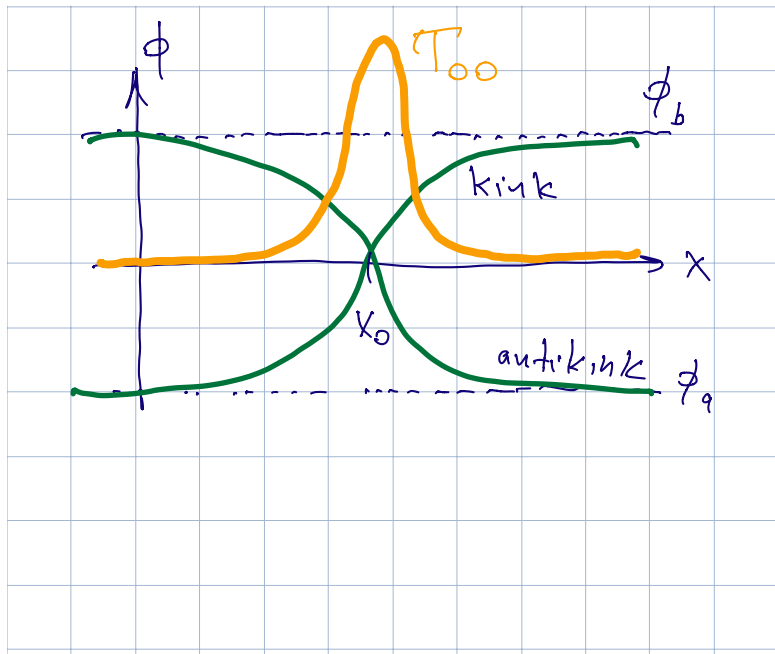
где $\phi_0 \in [\phi_a, \phi_b]$. Это определяет **решение кинк** $\phi(x)$, которое возрастает от $\phi(-\infty) = \phi_a$ до $\phi(\infty) = \phi_b$.

В секторе IV получаем аналогично **антикинк** $\phi(x)$:

$$\int_{\phi_0}^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{2V(\phi)}} = x_0 - x, \quad E_{\min}[-1] = E_{\text{antikink}} = E_{\text{kink}}$$

который убывает от $\phi(-\infty) = \phi_b$ до $\phi(\infty) = \phi_a$.

Kink = изгиб



Топологические вакуумы

- Конфигурация с минимальной энергией называется вакуумом.
- В секторах I, II, где $Q = 0$, вакуумы тривиальны, $\phi(x) = \text{const}$, $E_{\min} = 0$.
- В секторах III, IV, где $Q = \pm 1$ вакуумы нетривиальны, $\phi(x) = \phi_{\text{kink}}(x)$ or $\phi(x) = \phi_{\text{antikink}}(x)$, $E_{\min} > 0$. Это **топологические вакуумы**.
- Поскольку кинк (и антикинк) соответствует абсолютному минимуму энергии, он **абсолютно устойчив**. Любая его деформация вызывает увеличение энергии.
- Поскольку кинк полностью определяется топологией (граничными условиями на бесконечности), говорят, что это **топологический солитон** и что он **топологически устойчив**.
- Его плотность энергии $T_{00} = \frac{1}{2}\phi'^2 + V(\phi) = \phi'^2$ локализована в пространстве, следовательно это **компактный сгусток энергии**.

Статический кинк удовлетворяет уравнению поля (показать)

$$\phi' = \pm \sqrt{2V(\phi)} \quad \Rightarrow \quad \phi'' = \frac{V(\phi)}{d\phi}$$

Преобразование Лоренца превращает $\phi_{\text{kink}}(x)$ в зависящее от времени решение (показать), описывающее движущий кинк:

$$\phi(t, x) = \phi_{\text{kink}}\left(\frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}\right) \quad \Rightarrow \quad \phi'' - \ddot{\phi} = \frac{V(\phi)}{d\phi}$$

Энергия движущего кинка (показать) содержит Лоренц-фактор:

$$E = \frac{E_{\text{min}}}{\sqrt{1 - v^2}}$$

Кинки в теории $\lambda\phi^4$

Теория $\lambda\phi^4$

Часто рассматривается перенормируемая теория

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\dot{\phi}^2 - \phi'^2) - \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - \phi_0^2)^2,$$

симметричная относительно $\phi \rightarrow -\phi$. Эта симметрия спонтанно нарушается выбором вакуума: $\phi = \phi_0$ или $\phi = -\phi_0$. Уравнение Богомольного даёт (показать) решения

$$\phi_{\text{kink}}(x) = \pm \phi_0 \tanh \left(\phi_0 \sqrt{\frac{\lambda}{2}} (x - x_0) \right), \quad E_{\text{kink}} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \phi_0^3,$$

где верхний/нижний знаки соответствуют кинку/антикинку. Константа интегрирования x_0 определяет центр солитона, где плотность энергии максимальна:

$$T_{00} = \phi'^2 = \frac{\lambda \phi_0^4}{2 \cosh^2 \left(\phi_0 \sqrt{\frac{\lambda}{2}} (x - x_0) \right)}$$

Можно сказать, что кинк возникает благодаря спонтанному нарушению дискретной $\mathbb{Z}_2$ симметрии $\phi \rightarrow -\phi$.

Модель спинов

Теория $\lambda\phi^4$ может быть рассмотрена как непрерывный предел бесконечной цепочки спинов. Тривиальные вакуумы $\phi = \pm\phi_0$ соответствуют спиновой конфигурации

вверх : $\dots \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow \dots$ and **вниз** : $\dots \downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow \dots$

а кинк $-\phi_0 \leftarrow \phi_{\text{kin}}(x) \rightarrow \phi_0$ описывает

дефект : $\dots \downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow \dots$

Если температура T высока, вакуумное среднее $\phi_0(T)$ обращается в нуль и спины флуктуируют, принимая любое направление:

$\dots \uparrow\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow \dots$

После фазового перехода, когда $T < T_c$, вакуумное среднее $\phi_0(T)$ отлично от нуля и спины стремятся или все **вверх** или все **вниз**. Однако, они могут случайно образовать дефект. Его энергия которого конечна, но нужна бесконечная энергия, чтобы его уничтожить – перевернуть половину из бесконечного числа спинов. В этом сущность **механизма Киббла для производства дефектов в фазовых переходах**.

Теория $\lambda\phi^4$ в $3 + 1$ измерениях,

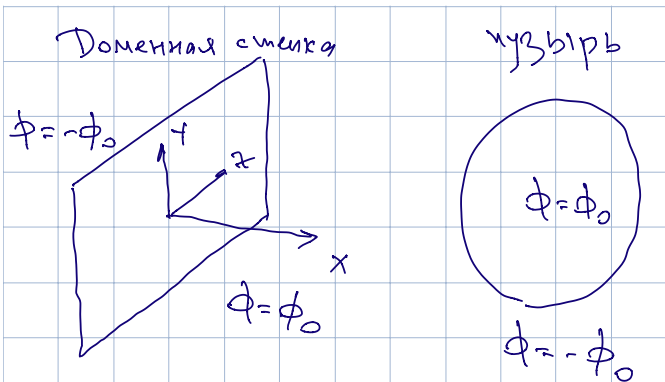
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\dot{\phi}^2 - (\partial_x \phi)^2 - (\partial_y \phi)^2 - (\partial_z \phi)^2 \right) - \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - \phi_0^2)^2 \quad (\star)$$

содержит дискретную $\mathbb{Z}_2$ симметрию $\phi \rightarrow -\phi$ и допускает решение

$$\phi(t, x, y, z) = \phi_{\text{kink}}(x) = \phi_0 \tanh \left(\phi_0 \sqrt{\frac{\lambda}{2}} (x - x_0) \right).$$

Его энергия максимальна при $x = x_0$, что соответствует **плоскости** в $\mathbb{R}^3$. Полная энергия бесконечна, но конечная её плотность распределена вдоль бесконечной плоскости. Такое решение называется **доменной стенкой**.

Доменные стенки и пузыри



если стенка конечна и замкнута,
получается пузырь

Доменные стенки в ранней вселенной

Если теория (★) действительно описывала физику на ранних временах, тогда доменные стенки возникали бы спонтанно и доживали бы до наших дней. Это привело бы к концентрации огромной энергии на 2-поверхностях в пространстве, что привело-бы к разрушению изотропии вселенной. Однако, поиск таких структур в космосе не даёт положительных результатов.
/Ячеистая структура сверхскоплений ?/

Резюме: вакуумы в модели $\lambda\phi^4$ может быть ассоциированы с элементами отображения пространственной бесконечности $\mathbb{Z}_2 = (\infty, -\infty)$ в вакуумное многообразие $\mathbb{Z}_2 = (\phi_0, -\phi_0)$

Отсутствие доменных стенок и пузырей в космосе означает, что либо все пузыри сколлапсировали или растворились, либо что теории с чисто дискретной симметрией $\phi \rightarrow -\phi$ не могли описывать раннюю вселенную.

Кинки в модели $\sin$ -Gordon

Модель sin-Gordon

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\dot{\phi}^2 - \phi'^2 \right) - V(\phi), \quad V(\phi) = 2 \sin^2 \frac{\phi}{2}$$

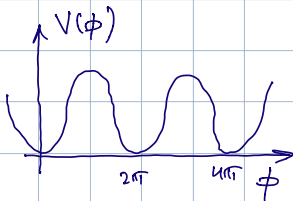
ϕ = угловая переменная, параметризующая окружность $\mathbb{S}^1$.
Статическое поле определяет отображение $\phi(x) : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$,
энергия которого конечна

$$E[\phi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \phi'^2 + \sin^2 \frac{\phi}{2} \right) dx < \infty$$

если в пределе $x \rightarrow \pm\infty$ поле ϕ стремится $2\pi n$, что соответствует одной точке на $\mathbb{S}^1$. Оба конца $\mathbb{R}^1$ отображаются на эту точку, поэтому концы можно отождествить, используя стереографическую проекцию $x = \cot(\vartheta/2)$, что эквивалентно замене $\mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$. Таким образом, статическое поле с конечной энергией определяет отображение $\phi(x) = \phi(x(\vartheta)) : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$. Любое отображение $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ характеризуется целым числом обмоток = топологическим зарядом,

$$Q = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{d\vartheta} d\vartheta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\phi}{dx} dx \in \mathbb{Z}$$

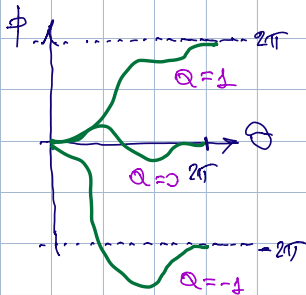
Топологический заряд



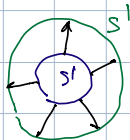
$$\phi \in S^1 \equiv \text{circle}$$

$$\phi(x): \mathbb{R}^1 \rightarrow S^1; \quad x = \text{ctg} \frac{\theta}{2} \Rightarrow$$

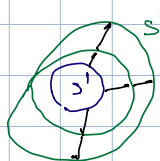
$$\phi(x(\theta)): S^1 \rightarrow S^1$$



$$Q=1:$$



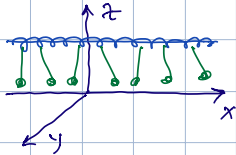
$$Q=2:$$



кольцо на бушке

Механическая аналогия

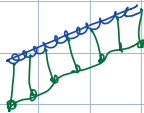
цепь связанных маятников $\phi_k(t)$



$$L = \sum_k^N \left\{ \dot{\phi}_k^2 - (1 - \cos \phi_k) - \frac{\alpha}{2} \left((\phi_k - \phi_{k-1})^2 + (\phi_k - \phi_{k+1})^2 \right) \right\}$$

при $N \rightarrow \infty$, $\phi_k(t) \rightarrow \phi(t, x) = \text{sin-Gordon}$

$Q=0$:



$Q=1$



Энергия перекрученной ленты конечна,
конструкция бесконечной энергии, чтобы
перевернуть половину ленты и убрать перекрутку

Кинки в модели sin-Gordon

Энергия принимает минимальное значение $E_{\min}[Q]$ если

$$\phi' = \pm \sqrt{2V(\phi)} = \pm 2 \sin \frac{\phi}{2}$$

Решения (проверить) определяют кинк и антикинк,

$$\phi(x) = \pm 4 \arctan(e^{x-x_0}), \quad E_{\min} = 8, \quad Q = \pm 1,$$

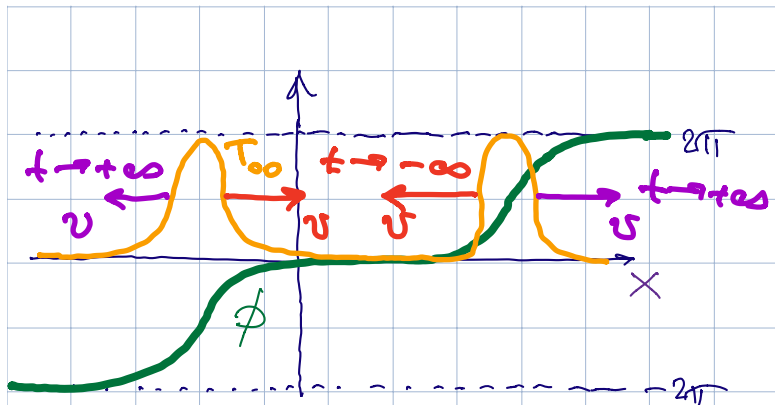
x_0 – центр кинка. Минимум энергии в секторах с $|Q| > 1$ отвечает кинам с бесконечно разнесенными центрами.

Преобразование Лоренца даёт кинк, движущийся со скоростью v . Существует также точное решение уравнения движения, описывающие столкновение двух кинков ($|Q| = 2$),

$$\phi'' - \ddot{\phi} = \sin \phi \Rightarrow \phi(t, r) = 4 \arctan \left(\frac{v \sinh(vx/\sqrt{1-v^2})}{\cosh(vt/\sqrt{1-v^2})} \right),$$

при $t \rightarrow \pm\infty$ оно сводится к двум кинкам со скоростями $\pm v$.

Столкновение двух кинков



Кинки в модели sin-Gordon характеризуются элементами первой фундаментальной группы $\pi_1(\mathbb{S}^1)$, определяющими число обмоток одной окружности вокруг другой.

- Солитоны это устойчивые сгустки энергии, описываемые решениями нелинейных уравнений.
- Солитоны в теории скалярного поля в 1+1 измерениях называются кинками. Они топологически устойчивы и соответствуют минимуму энергии в секторе с данным топологическим зарядом. Они определяют топологические вакуумы.
- Топологические заряды для модели $\lambda\phi^4$ соответствуют элементам группы $\mathbb{Z}_2$, а для модели sin-Gordon – первой фундаментальной группе $\pi_1(S^1)$, элементы которой определяют намотки одной окружности на другую.

Солитоны в $2+1$ измерениях.
Теорема Деррика.

N взаимодействующих скалярных полей

Рассмотрим N скалярных полей $\phi^C = (\phi^1, \dots, \phi^N)$ в $D+1$ мерном пространстве Минковского $M^{1,D}$ с метрикой

$$ds^2 = dt^2 - (dx^1)^2 - \dots (dx^D)^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

ϕ^C рассматриваются как координаты на N -мерном внутреннем пространстве $\mathcal{M}^N$ с метрикой G_{AB} . Теория определяется действием

$$S = \int \left(\frac{1}{2} G_{AB}(\phi^C) g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi^A \partial_\nu \phi^B - V(\phi^C) \right) \sqrt{|g|} d^{D+1}x \quad (\spadesuit)$$

где $V \geq 0$. Уравнения движения таковы (показать)

$$\square \phi^C + g^{\mu\nu} \Gamma_{AB}^C \partial_\mu \phi^B \partial_\nu \phi^B + G^{CB} \frac{\partial V}{\partial \phi^C} = 0$$

где $\square = g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$ а Γ_{AB}^C это связность для G_{AB} .

Существуют-ли статические решения с конечной энергией ?

Статические поля

Если поля ϕ^C зависят только от пространственных координат $x^k = (x^1, \dots, x^D) \equiv \mathbf{x}$, то их энергия

$$E[\phi] = \int T_{00} \sqrt{|g|} d^D x = E_2 + E_0 \quad \text{где}$$

$$E_2 = \frac{1}{2} \int G_{AB}(\phi) \sum_{k=1}^D \partial_k \phi^A \partial_k \phi^B d^D x, \quad E_0 = \int V(\phi) d^D x,$$

а действие пропорционально энергии:

$$S = - \int E dt = -E \int dt$$

Если $\phi^C(x^k)$ является решением уравнений, то оно должно быть стационарной точкой для действия и для энергии.

Следовательно, при варьировании должно выполняться

$$E[\phi + \delta\phi] = E[\phi] + \delta E + \delta^2 E + \dots$$

где первая вариация обращается в нуль:

$$\delta E = 0.$$

Изменение масштаба

Рассмотрим вариацию специального типа:

$$\phi^A(\mathbf{x}) \rightarrow \phi^A(\lambda \mathbf{x})$$

Энергия должна быть экстремальной, следовательно должно выполняться

$$\left. \frac{d}{d\lambda} E[\phi^A(\lambda \mathbf{x})] \right|_{\lambda=1} = 0$$

Имеем $E = E_2 + E_0$, и нетрудно видеть, что вводя $\mathbf{y} = \lambda \mathbf{x}$,

$$\begin{aligned} E_2[\phi^A(\lambda \mathbf{x})] &= \frac{1}{2} \int G_{AB}(\phi(\lambda \mathbf{x})) \sum_{k=1}^D \partial_k \phi^A(\lambda \mathbf{x}) \partial_k \phi^B(\lambda \mathbf{x}) d^D \mathbf{x} \\ &= \frac{\lambda^{2-D}}{2} \int G_{AB}(\phi(\mathbf{y})) \sum_{k=1}^D \partial_k \phi^A(\mathbf{y}) \partial_k \phi^B(\mathbf{y}) d^D \mathbf{y} = \lambda^{2-D} E_2[\phi^A(\mathbf{x})], \end{aligned}$$

а также

$$E_0[\phi^A(\lambda \mathbf{x})] = \lambda^{-D} E_0[\phi^A(\mathbf{x})]$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} E(\lambda) &= \lambda^{2-D} E_2 + \lambda^{-D} E_0, \\ \left. \frac{d}{d\lambda} E(\lambda) \right|_{\lambda=1} &= (2-D) \times E_2 - D \times E_0 = 0. \quad (*) \end{aligned}$$

Поскольку для нетривиального $\phi^A(\mathbf{x})$ имеем $E_2 > 0$, $E_0 > 0$, условие (*) невыполнимо при $D > 2$. Это доказывает теорему Деррика: теория скалярных полей с действием (♠) в $D > 2$ пространственных измерениях не допускает солитонных решений. Это сильно ограничивает выбор теории.

Кинки существуют в $D = 1$, для них теорема неприменима. Условие (*) выполняется при $D = 2$ если $E_0 = 0$, то есть когда в теории нет потенциала. Это соответствует сигма-модели в двух измерениях

Сигма модель

Теория N статических полей $\phi^A(\mathbf{x})$, зависящих от двух координат $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, с энергией

$$E[\phi(\mathbf{x})] = \frac{1}{2} \int G_{AB}(\phi) \sum_{k=1}^2 \partial_k \phi^A(\mathbf{x}) \partial_k \phi^B(\mathbf{x}) d^2 \mathbf{x},$$

которая масштабно-инвариантна, $E[\phi(\lambda \mathbf{x})] = E[\phi(\mathbf{x})]$.

Поля $\phi^A(\mathbf{x})$ определяют отображение

$$\phi^A(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{M}^N$$

где внутреннее пространство $\mathcal{M}^N$ можно выбрать как хотим.

Пусть $N = 2$ и **внутреннее пространство это сфера**, $\mathcal{M}^N = \mathbb{S}^2$.

Выберем сферические координаты на этой сфере:

$$\phi^1 = \Theta, \quad \phi^2 = \Phi, \quad G_{AB} d\phi^A d\phi^B = (d\Theta)^2 + \sin^2 \Theta (d\Phi)^2,$$

а в физическом пространстве выберем полярные координаты:

$$x^1 = \rho, \quad x^2 = \varphi, \quad g_{ik} dx^i dx^k = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2$$

получим

$O(3)$ -сигма модель в сферических координатах

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \int g^{ik} (\partial_i \Theta \partial_k \Theta + \sin^2 \Theta \partial_i \Phi \partial_k \Phi) \sqrt{g} d^2 x \\ &= \frac{1}{2} \int \left(\Theta_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} \Theta_\varphi^2 + \sin^2 \Theta (\Phi_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} \Phi_\varphi^2) \right) \rho d\rho d\varphi. \end{aligned}$$

Варьирование даёт уравнения для Θ, Φ (**получить**). Можно выбрать (**проверить**) $\Theta = \Theta(\rho)$, $\Phi = Q\varphi$, $Q \in \mathbb{Z}$, тогда

$$\begin{aligned} E &= \pi \int_0^\infty (\rho^2 \Theta'^2 + Q^2 \sin^2 \Theta) \frac{d\rho}{\rho} \\ &= \pi \int_0^\infty \left(\rho \Theta' - |Q| \sin \Theta \right)^2 \frac{d\rho}{\rho} - 2\pi |Q| \cos \Theta \Big|_0^\infty \end{aligned}$$

Полный квадрат зануляется если

$$\tan \frac{\Theta}{2} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{|Q|} \Rightarrow E = 4\pi |Q|,$$

что даёт **солитон с конечной энергией**. Это не случайно.

$O(3)$ -сигма модель в декартовых координатах

Выберем параметризацию внутреннего пространства $\mathbb{S}^2$ в терминах декартовых координат $\phi^a = (\phi^1, \phi^2, \phi^3)$, где

$$\phi^a \phi^a \equiv \sum_a (\phi^a)^2 = (\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 + (\phi^3)^2 = 1.$$

Тогда энергия принимает вид

$$E = \frac{1}{2} \int d^2x (\partial_k \phi^a)^2 \Big|_{\phi^a \phi^a = 1}$$

и поля определяют отображение

$$\phi^a(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$$

Энергия будет конечна если

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \partial_k \phi^a = 0$$

следовательно поля ϕ^a должны стремиться к постоянному значению на бесконечности, и можно выбрать

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \phi^a = \delta_3^a$$

Комактификация

Так как бесконечность = граница $\partial\mathbb{R}^2$ отображается в одну точку, можно эту границу тоже рассматривать как одну точку и компактифицировать $\mathbb{R}^2 \ni x, y$, используя **стереографическую проекцию**:

$$x + iy = \cot \frac{\vartheta}{2} e^{i\varphi}, \quad \text{где } x, y \in \mathbb{R}^2, \quad \vartheta, \varphi \in \mathbb{S}^2$$

Таким образом, поля определяют отображения $\phi^a(\mathbf{x}) : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$, которые гомотопны элементам **второй фундаментальной группы $\pi_2(\mathbb{S}^2) = \mathbb{Z}$** . Элементы этой группы определяются **числом обмоток одной сферы вокруг другой**:

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{2} \epsilon_{mn} \epsilon_{abc} \phi^a \partial_m \phi^b \partial_n \phi^c d^2x = \frac{1}{4\pi} \int \epsilon_{abc} \phi^a d\phi^b \wedge d\phi^c \in \mathbb{Z}$$

Этот интеграл всегда целое число, поскольку подынтегральное выражение есть форма объёма на $\mathbb{S}^2$ (**проверить**).

Предел Богомольного

Используя выражение для числа обмоток, можно вывести
(проверить) тождество

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \int d^2x (\partial_k \phi^a)^2 \\ &= \frac{1}{4} \int \left(\partial_m \phi^a \pm \epsilon_{mn} \epsilon_{abc} \phi^b \partial_n \phi^c \right)^2 d^2x + 4\pi |Q|. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$E \geq E_{\min} = 4\pi |Q|,$$

что является нижним пределом для энергии в секторе с топологическим зарядом Q . Энергия становится минимальной если выполняются уравнения Богомольного:

$$\partial_m \phi^a \pm \epsilon_{mn} \epsilon_{abc} \phi^b \partial_n \phi^c = 0.$$

/Е.Богомольный, Устойчивость классических решений,
Ядерная Физика 24 (1976) 861/

Решение уравнений Богомольного

Уравнения поля второго порядка (показать, налагая связь с помощью лагранжева множителя)

$$\Delta\phi^a = (\phi^b \Delta\phi^b)\phi^a$$

Решения уравнений Богомольного автоматически удовлетворяет (показать) этим уравнениям .

Определяя комплексную координату и комплексную функцию

$$z = x + iy, \quad Z = \frac{\phi^1 + i\phi^2}{1 - \phi^3},$$

уравнения Богомольного сводятся (попытаться проверить, но это более сложно) к условиям Коши-Римана,

$$\partial_x Z = \pm i \partial_y Z.$$

Следовательно, Z может быть произвольной голоморфной или антиголоморфной функцией, $Z = Z(z)$ или $Z = Z(\bar{z})$. Это даёт общее решение уравнений Богомольного. Решение описывает текстуры – обмотки плоскости $\mathbb{R}^2$ вокруг сферы S^2 .

Изначально они рассматривались в модели ферромагнетизма, предполагая, что ϕ^a описывает вектор спина. Однако, рассмотрим теорию единичного вектора в 3+1 измерениях,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^a \partial^\mu \phi^a, \quad \phi^a \phi^a = 1. \quad (\star)$$

Решением будет

$$\phi^a(t, x, y, z) = \phi_{texture}^a(x, y),$$

что соответствует конечной плотности энергии, равномерно распределённой вдоль оси z . Это **космическая струна**. Такие решения рассматриваются в литературе, однако, трудно показать, что известные модели физики высоких энергий содержат сектор, описываемый Лагранжианом $(\star)$.

Резюме: текстуры это солитоны, ассоциированные со второй фундаментальной группой $\pi_2(\mathbb{S}^2) = \mathbb{Z}$ отображений 2-сферы в 2-сферу.

Солитоны в $3+1$ измерениях:
скирмеоны

Модель Скирма (Skyrme)

Рассмотрим 4 скалярных поля $\phi^a = (\phi^0, \phi^k)$ со связью

$$(\phi^0)^2 + (\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 + (\phi^3)^2 = 1,$$

так что поля покрывают трехмерную сферу $\mathbb{S}^3$. Пусть ϕ^a зависят от трёх пространственных координат $x^k = (x^1, x^2, x^3)$. Используя матрицы Паули τ_k , определим унитарную матрицу

$$U = \phi^0 + i\phi^k \tau_k = \begin{pmatrix} \phi^0 + i\phi^3 & \phi^2 + i\phi^1 \\ -\phi^2 + i\phi^1 & \phi^0 - i\phi^3 \end{pmatrix} \in SU(2),$$

поскольку $U^\dagger = U^{-1}$ и $\det(U) = \phi^a \phi^a = 1$. Определим эрмитовы матрично-значные поля

$$A_k = i U \partial_k U^\dagger, \quad F_{ik} = [A_i, A_k] \Rightarrow (A_k)^\dagger = A_k, \quad (F_{ik})^\dagger = F_{ik}$$

и энергию, содержащую вторую и четвертую степени производных $\partial_k = \partial/\partial x^k$:

$$E = \frac{1}{12\pi^2} \int \left\{ \frac{1}{2} \text{tr} \left(\frac{1}{8} F_{ik} F^{ik} + A_k A^k \right) \right\} d^3x \equiv E_4 + E_2$$

Изменение масштаба

$x^k \rightarrow \lambda x^k$ вызывает $A_k \rightarrow A_k/\lambda$, $F_{ik} \rightarrow F_{ik}/\lambda^2$, $d^3x \rightarrow \lambda^3 d^3x$,

$$E = E_4 + E_2 \rightarrow \frac{1}{\lambda} E_4 + \lambda E_2 \Rightarrow \left. \frac{dE}{d\lambda} \right|_{\lambda=1} = E_2 - E_4 = 0,$$

что налагает **вириальное соотношение** $E_2 = E_4$. Поскольку $E_2 > 0$ и $E_4 > 0$, равенство возможно $\Rightarrow$ **теория Скимы обходит теорему Деррика**.

Поля ϕ^a определяют отображение $\phi^a(x) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$. Энергия будет конечной если только на бесконечности, при $|x| \rightarrow \infty$,

$$A_k \rightarrow 0 \Rightarrow U \rightarrow U_0 = \text{const.}$$

Следовательно, бесконечность=граница $\partial\mathbb{R}^3$ отображается в одно значение U_0 и поэтому может рассматриваться как одна точка. Это приводит к замене $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$, как при стереографической проекции.

Топологический заряд

Поля с конечной энергией определяют отображение

$$\phi^a(\mathbf{x}) : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3.$$

Такие отображения образуют **третью фундаментальную группу** $\pi_3(\mathbb{S}^3)$, элементы которой определяются числом обмоток одной 3-сферы вокруг другой:

$$Q = \frac{i}{24\pi^2} \int \text{tr} \left(\epsilon^{ijk} A_i A_j A_k \right) d^3x \in \mathbb{Z}.$$

Энергия ограничена снизу, $E \geq |Q|$. Чтобы это доказать (**попробуйте**), определяют матрицу

$$D_{ik} = \frac{1}{2} \text{tr}(A_i A_k) \quad \text{с собственными значениями } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$$

и показывают, что

$$Q = \frac{1}{2\pi^2} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3, \quad E = \frac{1}{12\pi^2} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2)$$

откуда получается неравенство $E \geq |Q|$.

В каждом топологическом секторе, то есть для каждого значения Q , существует полевая конфигурация $\phi^a(\mathbf{x})$, реализующая минимум энергии. Однако, нет уравнений Богомольного первого порядка, и приходится решать численно уравнения второго порядка

$$\partial_m \left(\frac{1}{4} [F^{mk}, A_k] + A^m \right) = 0.$$

Попробовать вывести эти уравнения, варьируя энергию.

Поэтому хотя в теории есть топологическая устойчивость, неочевидно что каждый скирмион соответствует абсолютному минимуму энергии. Есть только численные данные.

В секторе с $Q = 1$ решение сферически-симметрично:

$$U = \exp \left(i f(r) \frac{x^k \tau_k}{r} \right), \quad \text{где } r = \sqrt{x^k x^k},$$

уравнения поля сводится к

$$(r^2 + 2 \sin^2 f) f'' + 2 r f' + \sin(2f) \left(f^2 - 1 - \frac{\sin^2 f}{r^2} \right) = 0,$$

решение которого такое, что $\pi \leftarrow f(r) \rightarrow 0$ при $0 \leftarrow r \rightarrow \infty$, с энергией $E = 1.23$. Это на 23% больше единицы, но это абсолютный минимум, как показывает численный анализ. При $Q > 1$ нужно минимизировать $3D$ энергию, что даёт сложные пространственные структуры:

Скирмионы



2(3)



2: $D_{\infty h}$



3: T_d



4: O_h



D_{2d}



6: D_{4d}



7: Y_h



8: D_{6d}



D_{4d}



10: D_{4d}



11: D_{3h}



12: T_d



- Скирмионы это топологические солитоны, ассоциируемые с обмотками 3-пространства $\mathbb{R}^3$ вокруг 3-сферы S^3 .
- Исторически они были первым примером солитонов в 3+1 измерениях, и люди думали, что они представляют регулярную модель элементарных частиц, свободную от расходимостей.
- Сейчас думают, что быть может, они являются моделью пионов или атомных ядер.
- Термин "скирмион" стал универсальным и часто используется для обозначения солитонов в любых других моделях, например солитов в оптике, в конденсированных средах, и.т.д., а не только солитонов в модели Скирма.
- Возможно, что-то похожее на модель Скирма может служить эффективной теорией поля при высоких энергиях, тогда скирмионы должны рождаться в ранней вселенной.

Солитоны в $3+1$ измерениях: узлы Фаддеева-Хопфа

Модель Фаддеева-Хопфа

Рассмотрим 3 скалярных поля ϕ^a со связью

$$(\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 + (\phi^3)^2 = 1,$$

так что поля покрывают двумерную сферу $\mathbb{S}^3$, как в случае текстур. Однако, считаем, что ϕ^a зависят от трёх пространственных координат $x^k = (x^1, x^2, x^3)$. Определим

$$\begin{aligned} F_{ik} &= \frac{1}{2} \epsilon_{abc} \phi^a \partial_i \phi^b \partial_k \phi^c = \partial_i A_k - \partial_k A_i, \\ E &= \int \left((F_{ik})^2 + (\phi_k^a)^2 \right) d^3x \equiv E_4 + E_2 \end{aligned}$$

Изменение масштаба $x \rightarrow \lambda x$ даёт вириальное соотношение $E_2 = E_4$, как в случае скирмеонов, и теорема Деррика не работает. Энергия будет конечной если на бесконечности $\phi^a \rightarrow \text{const.}$, поэтому можно опять компактифицировать пространство: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$.

Поля с конечной энергией определяют отображение

$$\phi^a(\mathbf{x}) : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2.$$

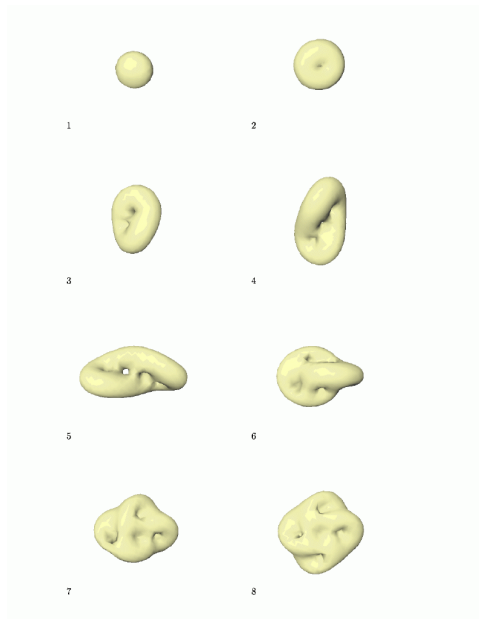
Такие отображения образуют третью фундаментальную группу 2-сферы, $\pi_3(\mathbb{S}^2) = \mathbb{Z}$, элементы которой определяются индексом Хопфа – числом обмоток сферы $\mathbb{S}^3$ вокруг $\mathbb{S}^2$:

$$Q = \frac{1}{8\pi^2} \int \epsilon^{ijk} A_i F_{jk} d^3x \in \mathbb{Z}.$$

Оказывается, что энергия ограничена снизу (предел Вакуленко-Капитанского, доказательство очень сложное)

$$E \geq c|Q|^{3/4}$$

В каждом топологическом секторе существует полевая конфигурация $\phi^a(\mathbf{x})$, реализующая абсолютный минимум энергии. Такие решения называются узлами Фаддеева-Хопфа.



- Узлы это топологические солитоны, ассоциируемые с обмотками 3-пространства $\mathbb{R}^3$ вокруг 2-сферы $\mathbb{S}^2$, которые определяются индексом Хопфа.
- Их энергия демонстрирует необычное поведение:
 $E \sim |Q|^{3/4}$.
- Возможно, они могут использоваться для эффективного описания глюонов в КХД.

Аномальные солитоны в $3+1$

/Рубаков-Тахвелидзе, Phys.Lett. B165 (1985) 109/

Число Черна-Саймонса и аксиальная аномалия

Индекс Хопфа в модели Фаддеева-Хопфа

$$Q = \frac{1}{8\pi^2} \int \epsilon^{ijk} A_i F_{jk} d^3x$$

не меняется при деформациях, поскольку $A_k = A^k(\phi^a)$ это композитное поле. Если же считать A_k независимым полем, то Q совпадает с числом Черна-Саймонса, $Q = N_{CS}$, которое меняется при деформациях. Однако, если присутствуют N_F фермионов, то разность $N_F - N_{CS}$ постоянна из за аксиальной аномалии:

$$\begin{aligned} \partial_\mu J_F^\mu &= \frac{1}{16\pi^2} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} = \partial_\mu J_{CS}^\mu \Rightarrow \partial_\mu (J_F^\mu - J_{CS}^\mu) = 0 \\ \Rightarrow N_F - N_{CS} &= \int (J_F^0 - J_{CS}^0) d^3x = const. \end{aligned}$$

Предположим, что изначально есть только $N_F = Q$ фермионов с энергией $E \sim Q$, а все бозоны в вакууме. Затем фермионы погружаются в море Дирака и исчезают, зато появляется векторное поле A_k с числом Черна-Саймонса, $N_{CS} = Q$.

Если бозоны A_k , Φ имеют энергию

$$E = \int \left(\frac{1}{4} (F_{ik})^2 + |(\partial_k - ie A_k) \Phi|^2 + \frac{\lambda}{4} (|\Phi|^2 - 1)^2 \right) d^3x$$

то при фиксированном $N_{CS} = Q$ будем иметь $E_{\min} \sim Q^{3/4}$, что растёт медленнее, чем $E \sim Q$ для свободных фермионов.

Таким образом, энергитически выгодно, чтобы фермионы превратились в бозоны.

Минимизация энергии E при фиксированном числе $N_{CS} = Q$ даёт аномальные солитоны, подобные узлам Фаддеева-Хопфа.
[/Шмид, Шапошников, Nucl.Phys. B775 \(2007\) 365/](#)

Чтобы такие солитоны были энергетически выгодны, плотность фермионного конденсата должна быть очень высока, как в нейтронных звездах.

Нетопологические солитоны в $3+1$
измерениях: Q -шары (Q -balls)

[/S.Coleman, Nucl.Phys. B262 \(1985\) 263/](#)

Комплексное скалярное поле Φ в 3+1 измерениях

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi^* \partial^\mu \Phi - V(|\Phi|) \quad \text{где} \quad \min_f \frac{V(f)}{f^2} < \frac{1}{2} \frac{d^2 V(f)}{df^2} \Big|_{f=0}$$

Например, можно выбрать

$$V(\Phi) = \lambda |\Phi|^2 (|\Phi|^4 - a |\Phi|^2 + b)$$

Уравнение поля и энергия

$$\square \Phi + \frac{dV}{d|\Phi|} \Phi = 0, \quad T_{00} = |\partial_0 \Phi|^2 + |\partial_k \Phi|^2 + V$$

Теория инвариантна при $\Phi \rightarrow e^{i\alpha} \Phi \Rightarrow$ сохраняется заряд

$$Q = i \int (\partial_t \Phi^* \Phi - \Phi^* \partial_t \Phi) d^3x$$

Если Φ не зависит от времени, тогда заряд равен нулю, а солитоны запрещаются теоремой Деррика.

Гармоническая зависимость от времени

$$\Phi(t, \mathbf{x}) = e^{i\omega t} \phi(\mathbf{x}) \Rightarrow Q = 2\omega \int \phi^2 d^3x \equiv 2\omega \mathcal{N}$$

где $\mathcal{N} = \int \phi^2 d^3x =$ **число частиц**. Энергия и Лагранжиан не зависят от времени,

$$E = \int T_{00} d^3x = \int (\omega^2 \phi^2 + (\nabla \phi)^2 + V) d^3x \equiv \omega^2 \mathcal{N} + E_2 + E_0,$$

$$L = \int \mathcal{L} d^3x = \int (\omega^2 \phi^2 - (\nabla \phi)^2 - V) d^3x \equiv \omega^2 \mathcal{N} - E_2 - E_0.$$

Энергия E **не пропорциональна** L и **не обязана быть стационарной** при масштабных преобразованиях $\mathbf{x} \rightarrow \lambda \mathbf{x}$, тогда как

$$L \rightarrow \lambda^3 (\omega^2 \mathcal{N} - E_0) - \lambda E_2,$$

стационарность которого налагает вириальное соотношение

$$3\omega^2 \mathcal{N} = 3E_0 + E_2 \quad \text{что выполнимо при} \quad \omega \neq 0$$

Минимизация энергии

Можно также зафиксировать заряд Q и варьировать E ,

$$\omega = \frac{Q}{2\mathcal{N}} \Rightarrow E = \frac{Q^2}{4\mathcal{N}} + E_2 + E_0 \rightarrow \frac{Q^2}{4\lambda^3\mathcal{N}} + \lambda E_2 + \lambda^3 E_0,$$

варьирование даёт то же условие $3\omega^2\mathcal{N} = 3E_0 + E_2$.

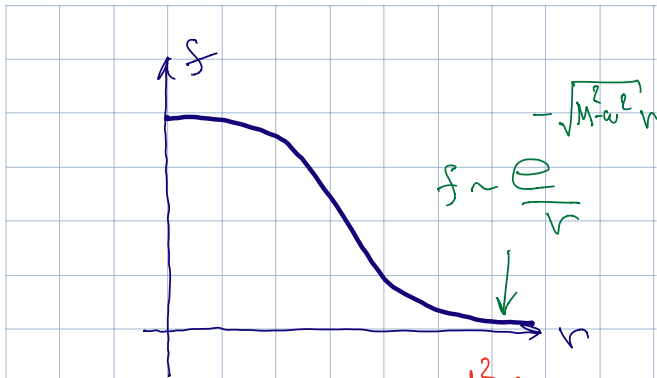
Таким образом, сохранение скалярного заряда Q позволяет обойти теорему Деррика и приводит к существованию нетривиальных солитонных решений – Q -шаров. Простейшие из них сферически симметричны, $\phi = f(r)$, и получаются из

$$f'' + \frac{2}{r} f' + \omega^2 f = \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial f},$$

решения которого быстро убывают при $r \rightarrow \infty$,

$$\phi \sim \frac{1}{r} e^{-\sqrt{M^2 - \omega^2} r} \quad \text{где масса кванта поля} \quad M = \left. \frac{1}{2} \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} \right|_{\phi=0}$$

Численный профиль Q-шара



$$\min_f \frac{V(f)}{f^2} < \omega < M = \frac{1}{2} \frac{d^2 V}{df^2} \Big|_{f=0}$$

Заряд $Q = Q(\omega)$, Энергия $E < QM$

$\Rightarrow$ Не возможен распад на кванты

- Q-шары это солитоны, но не топологические, и нет доказательства того, что их энергия ограничена снизу ненулевым значением. Однако, численно это подтверждается. Вероятно, они абсолютно устойчивы.
- Простые и весьма популярные решения. Возникают в суперсимметричных расширениях Стандартной Модели. Быть может дают вклад в тёмную материю.
- Могут обладать угловым моментом, если

$$\Phi = f(r, \vartheta) e^{i\omega t + im\varphi}$$

исторически первый пример вращающего солитона
[/M.S.Volkov, E.Wohnert, Phys.Rev. D66 \(2002\) 085003/](#)

- Существуют при учете гравитации, тогда им даже потенциал не нужен:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi G} R + \partial_\mu \Phi^* \partial^\mu \Phi, \quad \Phi = e^{i\omega t} \phi(\mathbf{x}).$$

в этом случае они называются **бозонными звездами**.

Резюме лекций 2 и 3

- Теорема Деррика сильно ограничивает класс теорий, допускающих солитонные решения.
- Допустимым выбором в $D = 2$ является $O(3)$ -сигма модель, решения которой определяют **намотки плоскости $\mathbb{R}^2$ на сферу – текстуры**.
- В $D = 3$ является приходится выбирать теории с четвертой степенью производной в энергии, такие как модель Скирма или модель Фаддеева-Хопфа. Их решения определяют **намотки пространства $\mathbb{R}^3$ на 3-сферу или на 2-сферу**. Однако, предел Богомольного не достигается.
- Другая возможность в $D = 3$ это ввести сохраняющийся заряд, такой как число Черна-Саймонса в модели Рубакова-Тавхелидзе, или нётеровский заряд для комплексного скалярного поля. Минимизация энергии при фиксированном заряде даёт солитоны, которые могут быть не топологическими (Q -шары).

Магнитные вихри

Модель Гинзбурга-Ландау

Магнитные вихри реально наблюдаются в сверхпроводящих средах и описываются эффективной теорией Гинзбурга-Ландау, которая математически эквивалентна релятивистской Абелевой модели Хиггса.

Модель Гинзбурга-Ландау рассматривает магнитное поле $F_{ik} = \partial_i A_k - \partial_k A_i$, взаимодействующее с комплексным скалярным полем Φ , которое описывает конденсат заряженных пар Купера с энергией

$$E = \int \left(\frac{1}{4} F_{ik} F_{ik} + (D_k \Phi)^* D^k \Phi + \frac{\lambda}{4} (|\Phi|^2 - \Phi_0^2)^2 \right) d^3x.$$

Здесь $D_k \Phi = (\partial_k - iqA_k)\Phi$ и $q = 2e$ заряд пары Купера, $\Phi_0 = \Phi_0(T)$ плотность сверхпроводящего конденсата, который отличен от нуля при $T < T_c$. Теория инвариантна относительно $U(1)$ калибровочных преобразований

$$A_k \rightarrow A_k + \frac{1}{q} \partial_k \alpha, \quad \Phi \rightarrow e^{i\alpha} \Phi$$

и описывается уравнениями

Механизм Хиггса и эффект Мейсснера

$$\partial^s F_{sk} = iq(D_k \Phi)^* \Phi + c.c., \quad D_k D^k \Phi = \frac{\lambda}{2}(|\Phi|^2 - \Phi_0^2)\Phi$$

Если $T > T_c$ то $\Phi_0(T) = 0$, и конфигурация с минимальной энергией это $A_k = 0, \Phi = 0$. Его возбуждения соответствуют фотону с двумя поляризациями и комплексному скаляру, которое тоже несёт две степени свободы. Всего 2+2 степени свободы. Если $T < T_c$ то $\Phi_0 \neq 0$, и основное состояние $A_k = 0, \Phi = \Phi_0$, малые возбуждения которого $A_k = \delta A_k, \Phi = \Phi_0 + \delta\Phi$. Калибровочное преобразование с $|\alpha| \ll 1$ даёт

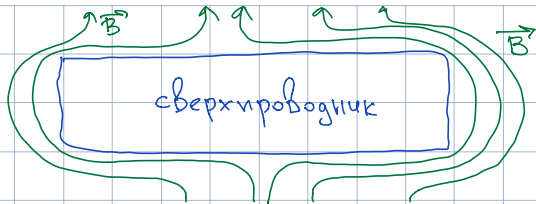
$$\delta A_k \rightarrow \delta A_k + \partial_k \alpha / q \quad \delta\Phi \rightarrow \delta\Phi + i\Phi_0 \alpha$$

что можно использовать, чтобы сделать $\delta\Phi$ вещественным. Тогда линеаризация уравнений даёт (проверить) $\partial^k \delta A_k = 0$,

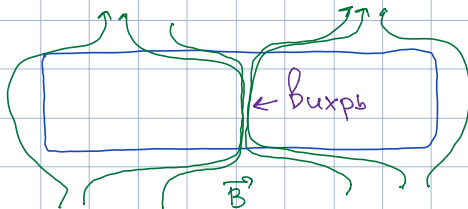
$$(\Delta - m_V^2)\delta A_k = 0, \quad (\Delta - m_S^2)\delta\Phi = 0 \quad \text{где} \quad m_V^2 = 2q^2\Phi_0, \quad m_S^2 = \lambda\Phi_0^2$$

$\Rightarrow$ поля становятся массивными с 3+1 степенями свободы (механизм Хиггса) и должны быстро убывать с расстоянием $\Rightarrow$ магнитное поле не может проникнуть в сверхпроводник.

Выталкивание поля и его проникновение



Магнитное поле $\vec{B}$ выталкивается из сверхпроводника. Однако, очень сильное поле начинает течь проникать в виде нитей,



Внутри которых сверхпроводимость нарушена
= Абрикосовские вихри

Вихри вдоль оси z

Выберем поля в виде $A_x(x, y)$, $A_y(x, y)$, $\Phi(x, y)$ и перейдем к безразмерным величинам

$$x^k \rightarrow q\Phi_0 x^k, \quad A_k \rightarrow \frac{A_k}{\Phi_0}, \quad \Phi \rightarrow \frac{\Phi}{\Phi_0} \quad \beta = \frac{\lambda\Phi_0^2}{2q^2} = \left(\frac{m_s}{m_v} \right)^2$$

Пусть $D_k = \partial_k - iA_k$. Плотность энергии вдоль оси z

$$\mathcal{E} = \Phi_0^2 \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{1}{4} (F_{ik})^2 + |D_k \Phi|^2 + \frac{\beta}{2} (|\Phi|^2 - 1)^2 \right) d^2x$$

конечна если на бесконечности $F_{ik} \rightarrow 0$, $D_k \Phi \rightarrow 0$, $|\Phi| \rightarrow 1 \Rightarrow$ поля сводятся к чистой калибровке:

$$A_k \rightarrow \partial_k \alpha / q, \quad \Phi \rightarrow e^{i\alpha} \in U(1) = \mathbb{S}^1 = \text{вакуумное многообразие}$$

Бесконечность это граница $\partial\mathbb{R}^2 = \mathbb{S}^1$, и поле Хиггса определяет её отображение в вакуумное многообразие,

$$\Phi : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 \in \pi_1(\mathbb{S}^1)$$

$\Rightarrow$ существует топологический заряд $Q \in \mathbb{Z} =$ число обмоток.

Введем полярные координаты, $x + iy = \rho e^{i\varphi}$, тогда на бесконечности $\rho \rightarrow \infty$ имеем $\Phi \rightarrow \exp(i\alpha(\varphi))$ где $\alpha(\varphi) \in [0, 2\pi Q)$, следовательно магнитный поток через $\mathbb{R}^2$

$$\Psi(Q) = \oint_{\partial\mathbb{R}^2} A_k dx^k = \oint_{\partial\mathbb{R}^2} \frac{\partial_k \alpha}{q} dx^k = \frac{2\pi Q}{q}$$

Получается, что если энергия конечна, то магнитный поток в сверхпроводнике обязан быть кратным значению

$$\Psi(1) = \frac{2\pi}{q}$$

Постоянная Планка здесь не используется. Таким образом, топологический заряд Q определяет магнитный поток. Чему равна энергия в секторе с данным Q ?

Преобразование Богомольного

Используя антисимметричный тензор $\epsilon_{km} = -\epsilon_{mk}$ так что $\epsilon_{im}\epsilon_{km} = \delta_{ik}$ даёт

$$\epsilon_{ks} D_k D_s \Phi = -\frac{i}{2} \epsilon_{ks} F_{ks} \Phi$$

что ведёт к тождеству

$$\frac{1}{2} |D_k \Phi + i \epsilon_{ks} D_s \Phi|^2 = |D_k \Phi|^2 - \frac{|\Phi|^2}{2} \epsilon_{ks} F_{ks} + \partial_k (i \epsilon_{ks} \Phi^* D_s \Phi)$$

В результате, плотность энергии

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} (F_{ks})^2 + |D_k \Phi|^2 + \frac{\beta}{2} (|\Phi|^2 - 1)^2 \\ = & \frac{1}{2} |D_k \Phi + i \epsilon_{ks} D_s \Phi|^2 + \frac{1}{4} \left(F_{ks} + (|\Phi|^2 - 1) \epsilon_{ks} \right)^2 \\ + & \frac{1}{2} \epsilon_{ks} F_{ks} + \frac{\beta - 1}{2} (|\Phi|^2 - 1)^2 - \partial_k (i \epsilon_{ks} \Phi^* D_s \Phi) \end{aligned}$$

Выберем $\beta = 1$ и проинтегрируем, тогда синие члены не дают вклада, красный член даёт магнитный поток $\Psi = 2\pi Q/q \Rightarrow$

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \Phi_0^2 \int \left(\frac{1}{2} |D_k \Phi + i \epsilon_{ks} D_s \Phi|^2 + \frac{1}{4} \left(F_{ks} + (|\Phi|^2 - 1) \epsilon_{ks} \right)^2 \right) d^2 x \\ &+ \frac{2\pi Q \Phi_0^2}{q} \geq \mathcal{E}_{\min}(Q) = \frac{2\pi Q \Phi_0^2}{q} > 0\end{aligned}$$

Энергия ограничена снизу и достигает **абсолютного минимума**, $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\min}(Q)$ если удовлетворяются уравнения Богомольного первого порядка

$$D_k \Phi + i \epsilon_{ks} D_s \Phi = 0, \quad F_{ks} + (|\Phi|^2 - 1) \epsilon_{ks} = 0.$$

Решения определяют вихри, они абсолютно устойчивы. Они удовлетворяют также уравнениям поля второго порядка.

Аксиальная симметрия

$$A_\varphi = Qw(\rho)d\varphi, \quad \Phi = f(\rho)e^{iQ\varphi}$$

где $0 \leftarrow w \rightarrow 1$, $0 \leftarrow f \rightarrow 1$ при $0 \leftarrow \rho \rightarrow \infty$. Получаем

$$F_{\rho\varphi} = Qw', \quad D_\rho\Phi = f'e^{iQ\varphi}, \quad D_\varphi\Phi = iQ(1-w)fe^{i\varphi},$$

энергия принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{E}}{2\pi\Phi_0^2} &= \int_0^\infty \left(\frac{Q^2 w'^2}{2\rho^2} + f'^2 + \frac{Q^2(1-w)^2 f^2}{\rho^2} + \frac{\beta}{2}(f^2 - 1)^2 \right) \rho d\rho \\ &= \int_0^\infty d\rho \left\{ \frac{\rho}{2} \left(\frac{Qw'}{\rho} + (f^2 - 1) \right)^2 + \frac{1}{\rho} \left(\rho f' + Qf(w - 1) \right)^2 \right\} \\ &\quad + \int_0^\infty d\rho \left\{ Q \frac{d}{d\rho} (f^2 - 1)(1 - w) + \rho \frac{\beta - 1}{2} (f^2 - 1)^2 \right\} \end{aligned}$$

Синий член пропадает если $\beta = 1$, красный есть полная производная, интеграл которой Q . Лиловые члены дают уравнения Богомольного

Аксиальные вихри

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\min} : \quad \frac{Qw'}{\rho} + (f^2 - 1) = 0, \quad \rho f' + Qf(w - 1) = 0.$$

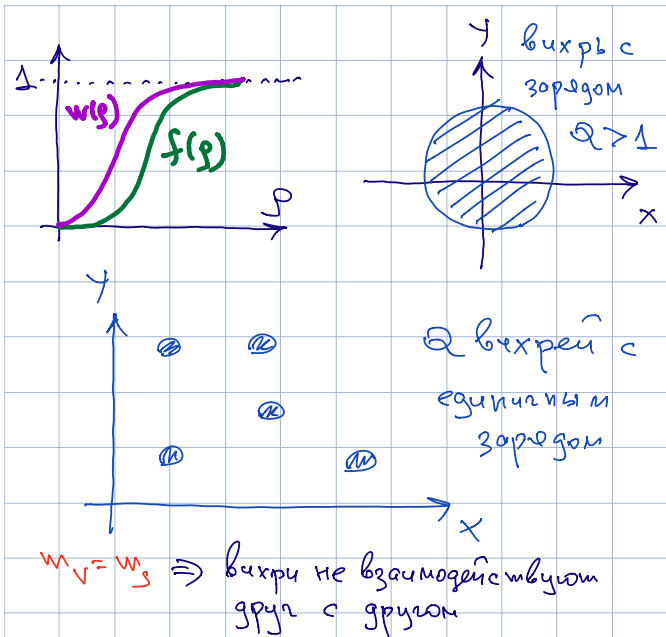
Решения известны только численно:

$$0 \leftarrow w(\rho) \rightarrow 1 + \mathcal{O}(e^{-\sqrt{2}\rho}), \quad 0 \leftarrow f(\rho) \rightarrow 1 + \mathcal{O}(e^{-\sqrt{2}\rho}),$$

они экспоненциально быстро достигают асимптотических значений, поэтому вихри сильно локализованы в поперечном направлении. Вихрь с зарядом Q может расщепиться на Q вихрей с единичным зарядом, которые могут находиться где угодно. В пределе Богомольного вихри не взаимодействуют друг с другом, поскольку при $\beta = 1$ имеем $m_v = m_s \Rightarrow$

скалярное притяжение = векторное отталкивание

Вихри



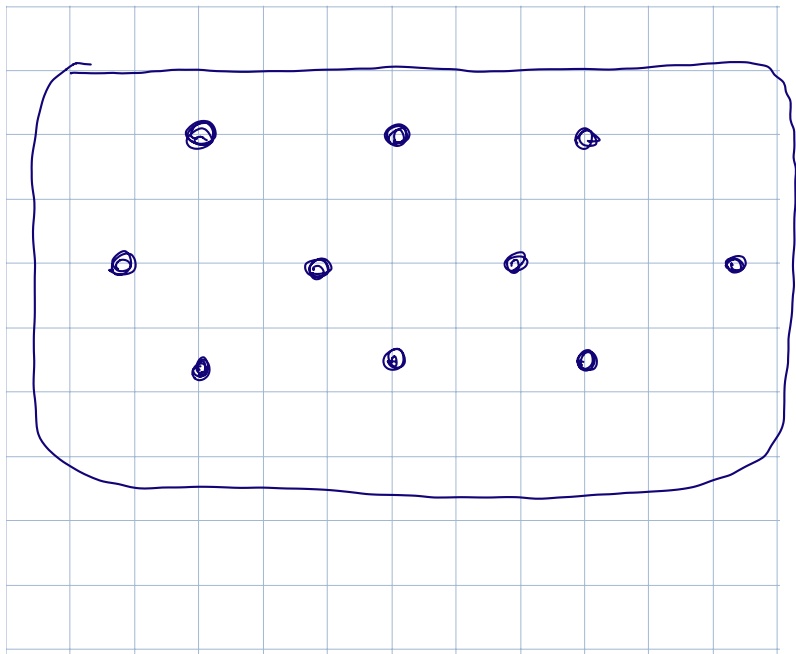
$$\beta \neq 1$$

В этом случае нет уравнений Богомольного, нужно решать уравнения второго порядка.

Если $\beta < 1 \Rightarrow$ сверхпроводник типа I, тогда $m_s < m_v$, поэтому взаимодействие за счёт векторного обмена $\sim \exp(-m_v \rho)$ убывает быстрее, чем скалярная сила $\sim \exp(-m_s \rho) \Rightarrow$ скалярное притяжение доминирует и вихри притягиваются друг к другу, сливаясь в один мультивихрь.

Если $\beta < 1 \Rightarrow$ сверхпроводник типа II, то вихри отталкиваются друг от друга, образуя решетку Абрикосова.

Решетка Абрикосова



Абелева модель Хиггса

В 1973, 15 лет после Абрикосова, Нильсен и Олесен переоткрыли те же самые решения в контексте релятивистской теории поля с калибровочной инвариантностью $U(1)$:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu\Phi)^*D^\mu\Phi - \frac{\lambda}{4}(|\Phi|^2 - \Phi_0^2)^2.$$

Если выбрать $A_0 = A_z = 0$, $A_k = A_k(x^5)$, $\Phi = \Phi(x^5)$, то получаются вихри, которые теперь называются струнами.

Однако, параметры теории теперь совсем другие, и энергия $\mathcal{E} \sim \Phi_0^2$ может достигать огромных значений.

Считается, что такие струны могли бы спонтанно рождаться во время фазовых переходов в ранней вселенной ([механизм Киббля](#)). Если $T > T_c$ то $\Phi_0(T) = 0$ и поля A_μ , Φ флуктуируют около нуля. Если $T < T_c$ то $\Phi_0(T) \neq 0$, амплитуда поля Хиггса становится отличной от нуля, но фаза продолжает флуктуировать. Если фаза случайным образом образует намотку вдоль замкнутого контура, то это породит струну в поперечном направлении.

Космические струны и наблюдения

После образования космической струны температура падает, струна становится абсолютно устойчивой и существует вечно. Такие струны могли бы образовывать сети, что должно быть наблюдаемым, например изучая изотропию реликтового излучения. Многие люди занимались этим и продолжают заниматься, проводя моделирование рождения струн. Однако, струн в небе не найдено.

Вероятно, это означает, что Абелева модель Хиггса не описывает физику высоких энергий. Реалистичные модели физики тоже допускают те же самые решения, но они становятся неустойчивы, поскольку топология другая.

Определим **вакуумное многообразие** $\mathcal{V}$ как множество Φ для которых $V(\Phi) = 0$, тогда поведение Φ на бесконечности $\partial\mathbb{R}^2 = \mathbb{S}^1$ определяет отображение

$$\Phi : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathcal{V} \in \pi_1(\mathcal{V})$$

Для Абелевой модели Хиггса $\mathcal{V} = \mathcal{S}^1 \Rightarrow \pi_1(\mathcal{V}) = \mathbb{Z}$

Электрослабые струны

Рассмотрим теорию Вайнберга-Салама, где поле Хиггса это комплексный дублет,

$$\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)^T$$

Уравнения теории содержат уравнения Абелевой модели Хиггса как частный случай, поэтому космические струны являются решением. Они называются ***Z-струны*** и ***W-струны***, в зависимости от способа их погружения в теорию Вайнберга-Салама. Однако, вакуумное многообразие, определяемое условием,

$$\Phi^\dagger \Phi = |\Phi_1|^2 + |\Phi_2|^2 = \Phi_0^2$$

является 3-сферой, $\mathcal{V} = \mathbb{S}^3$, а группа $\pi_1(\mathbb{S}^3)$ тривиальна $\Rightarrow$ энергия может быть сведена к нулю непрерывными деформациями $\Rightarrow$ ***электрослабые струны неустойчивы, могут рваться***.

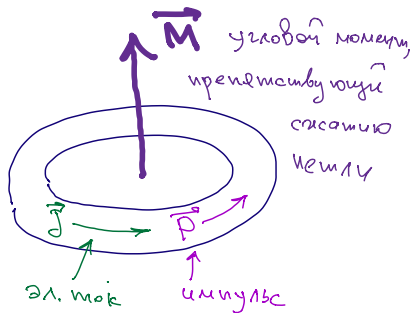
Электрослабая теория содержит также более сложные решения в бозонном секторе, описывающие струны, по которым течет электрический ток. Ток может достигать огромных значений.

[/Garaud,Volkov, Nucl.Phys.B 826 \(2010\) 174/](#)

Такие струны тоже неустойчивы, но их короткие сегменты устойчивы, поэтому если сделать петлю из такого сегмента, то возникнет кольцевой ток и угловой момент. Такая устойчивая петля с током и угловым моментом называется **вортоном**, решения были получены в

[/Radu,Volkov, Phys.Rep. 468 \(2008\) 101/](#)

[/Garaud, Radu,Volkov, Phys.Rev.Lett. 111 \(2013\) 171602/](#)



Вращающаяся петля, сделанная из сегмента сверхпроводящей струны

$$\mathcal{L} = \sum_{a=1,2} \left\{ -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^{(a)} - \partial_\nu A_\mu^{(a)})^2 + \left| \partial_\mu \phi^a - i g_a A_\mu^{(a)} \phi^a \right|^2 - V(\phi^a) \right\}$$

модель Виттена

Устойчивые космические струны существуют если первая фундаментальная группа вакуумного многообразия нетривиальна,

$$\phi_1(\mathcal{V}) \neq 0$$

В Стандартной Модели это условие не выполняется. Если оно выполняется для какого-то обобщения теории, которое работает на ранних временах, то могут возникать космические струны, хотя пока они не обнаружены.

В Стандартной Модели, по всей вероятности, существуют **вortexы – устойчивые вращающиеся петли**, сделанные из замкнутых сегментов сверхпроводящих струн.

Магнитные монополи

Уравнения Максвелла

$$\partial_\sigma F^{\sigma\mu} = 4\pi J^\mu, \quad \partial_\sigma \tilde{F}^{\sigma\mu} = 0 \quad (\star)$$

допускают решения, описывающие электрический заряд,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r,$$

но $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow$ магнитное поле не имеет источника. Что если сделать уравнения симметричными путём введения магнитного тока ?

$$\partial_\sigma F^{\sigma\mu} = 4\pi J^\mu, \quad \partial_\sigma \tilde{F}^{\sigma\mu} = 4\pi \tilde{j}^\mu \quad (\star\star)$$

Тогда получим решение, описывающее магнитный заряд

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 4\pi \tilde{\rho} \Rightarrow \vec{B} = \frac{P}{r^2} \vec{e}_r.$$

Такая возможность ничему не противоречит. Никто не видел монополей, но быть может они просто редко встречаются.

Движение в поле монополя /Пуанкаре, 1896/

Предположим, что в начале координат находится электрический заряд Q и магнитный заряд P , так что

$$\vec{E} = \frac{Q\vec{r}}{r^3}, \quad \vec{B} = \frac{P\vec{r}}{r^3},$$

Они производят силу Лоренца, действующую на движущую частицу,

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{E} + e\vec{v} \times \vec{B}$$

(считаем, что скорость света $c = 1$). **Показать**, что монополь даёт вклад в орбитальный момент частицы, так что сохраняющимся вектором является

$$\vec{J} = \vec{r} \times \vec{v} - eP \frac{\vec{r}}{r}$$

Показать, что частица будет двигаться по поверхности конуса с вершиной в начале координат.

Монополь Дирака /1930/

В квантовой механике нужны потенциалы $\phi, \vec{A}$ для уравнения Шредингера

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left\{ e\phi - \frac{1}{2m} \left(\vec{\nabla} - ie\vec{A} \right)^2 \right\} \psi$$

но как найти такой векторный потенциал, чтобы было

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B} = \frac{P\vec{r}}{r^3} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} \neq 0 ?$$

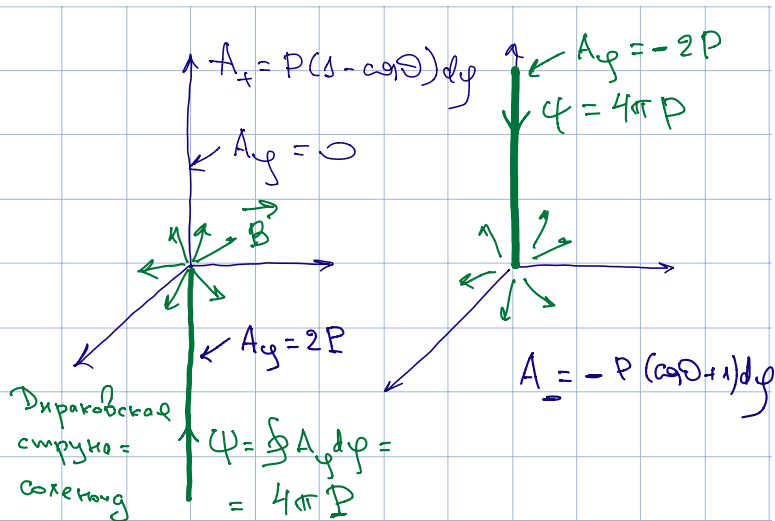
Это кажется невозможным, поскольку дивергенция ротора обращается в нуль. Однако, последнее верно если только поле $\vec{A}$ не имеет особенностей, поэтому Дирак предложил выбрать потенциал в сферических координатах r, ϑ, φ так:

$$A_k dx^k \equiv A_- = -P(\cos \vartheta - 1) d\varphi \quad \text{если} \quad \vartheta \in [0, \pi/2 + \epsilon)$$

$$A_k dx^k \equiv A_+ = -P(\cos \vartheta + 1) d\varphi \quad \text{если} \quad \vartheta \in (\pi/2 - \epsilon, \pi]$$

ротор чего даёт радиальное магнитное поле **проверить**. A_- имеет особенность на отрицательной части оси z , а потенциал A_+ имеет особенность на положительной части оси z .

Монополь = конец соленоида



Квантование магнитного заряда

Используем потенциал A_+ в верхней полусфере, где он регулярен, а потенциал A_- используется в нижней полусфере, где он регулярен. В экваториальной зоне потенциалы A_+ и A_- связаны калибровочным преобразованием

$$A_- = A_+ + d(2P\varphi), \quad \psi_+ = \exp(ie2P\varphi)\psi_-$$

Волновые функции ψ_+ и ψ_- будут однозначны если

$$2eP = n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \boxed{P = \frac{n}{2e} \times \hbar c} \text{ условие квантования Дирака}$$

В этом состоит конструкция Дирака – использование двух локально регулярных калибровок, что позволяет избавиться от сингулярностей в потенциале.

Условие квантования, записанное в виде $e = n/(2P)$ означает, что присутствие хотя бы одного монополя во вселенной требует, чтобы все электрические заряды были квантованы.

Связность в расслоении

С математической точки зрения множество всех фазовых факторов волновой функции является $U(1)$ расслоением над базовым пространством S^2 , а векторный потенциал это связность в расслоении. Расслоение это топологически нетривиально, поэтому глобального сечения расслоения не существует, и нужно использовать как минимум два разных локальных сечения A_+ и A_- . Нетривиальность расслоения характеризуется индексом Черна, который и есть магнитный заряд n .

Использование двух локальных калибровок естественно математически, но для физиков это не всегда понятно. Поэтому все обрадовались, когда выяснилось, что если погрузить монополь в теорию с калибровочной группой $SU(2)$, то можно использовать глобально регулярную калибровку, поскольку $SU(2)$ -расслоение над базой S^2 тривиально. Эта конструкция называется **монополь Ву-Янга**.

Неабелева теория Джорджи-Глэшоу

Рассматриваются матрично-значные поля

$$A_\mu = T_a A_\mu^a, \quad \Phi = T_a \Phi^a, \quad \text{где } T_a = \frac{\tau_a}{2}, \quad \tau_a = \text{матрицы Паули}$$

вводятся тензор поля и ковариантная производная

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ie[A_\mu, A_\nu], \quad D_\mu \Phi = \partial_\mu \Phi - ie[A_\mu, \Phi]$$

Лагранжиан выбирается в виде

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \text{tr} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) + \text{tr} (D_\mu \Phi D^\mu \Phi) - \frac{\lambda}{4} (\Phi^a \Phi^a - \Phi_0^2)^2$$

он инвариантен относительно калибровочных преобразований

$$\Phi \rightarrow U \Phi U^\dagger, \quad A_\mu \rightarrow U(A_\mu + i \partial_\mu) U^\dagger$$

где $U \in SU(2)$ унитарная матрица, $UU^\dagger = 1$.

Уравнения движения

$$D_\mu F^{\mu\nu} = ie[\Phi, D^\nu \Phi], \quad D_\mu D^\mu \Phi + \lambda(\Phi^a \Phi^a - \Phi_0^2)\Phi = 0$$

Рассмотрим монополь Дирака с $n = 2$ в одной из калибровок

$$A_{\text{Dirac}} = \frac{1}{e} (1 - \cos \vartheta) d\varphi$$

и выберем неабелевы поля в виде

$$A = T_3 A_{\text{Dirac}}, \quad \Phi = T_3 \Phi_0$$

что решает уравнения движения. Существует калибровочное преобразование $U \in SU(2)$, приводящее поля к виду

$$A = T^a \epsilon_{aik} \frac{x^i}{er^2} dx^k, \quad \Phi = T^a \frac{x^a}{r} \Phi_0$$

Это решение называется **монополь Ву-Янга**. Поля теперь регулярны везде, кроме начала координат, где плотность энергии $T_{00} \sim P^2/r^4$ содержит кулоновскую расходимость

Монополь тХофта-Полякова

Оказывается, что та же самая теория допускает монополи с конечной энергией. Переопределим величины: $x^k \rightarrow e\Phi_0 x^k$, $A_\mu \rightarrow A_\mu/\Phi_0$, $\Phi \rightarrow \Phi/\Phi_0$, $\lambda/e^2 \equiv \beta/2$, тогда энергия в статическом и чисто магнитном случае

$$E = \frac{\Phi_0}{e} \int \left(\frac{1}{4} (F_{ik}^a)^2 + \frac{1}{2} (D_k \Phi^a)^2 + \frac{\beta}{2} (\Phi^a \Phi^a - 1)^2 \right) d^3x$$

где $F_{ik}^a = \partial_i A_k^a - \partial_k A_i^a + \epsilon_{abc} A_i^b A_k^c$, $D_k \Phi^a = \partial_k \Phi^a + \epsilon_{abc} A_k^b \Phi^c$

Энергия будет конечна если при $x \rightarrow \infty$

$$F_{ik}^a \rightarrow 0, \quad D_k \Phi^a \rightarrow 0, \quad \Phi^a \Phi^a \rightarrow 1$$

так что поля становятся чистой калибровкой, поле Хиггса принадлежит вакуумному многообразию $\mathcal{V} = \mathbb{S}^2$. Поэтому Хиггс на бесконечности определяет отображение

$$\Phi_\infty : \partial \mathbb{R}^3 = S^2 \rightarrow \mathcal{V} = \mathbb{S}^2 \in \pi_2(\mathbb{S}^2)$$

Топологический заряд

Конфигурации с конечной энергией определяют отображение $\mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ и характеризуются числом обмоток

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2_\infty} \epsilon_{abc} \Phi^a d\Phi^b \wedge d\Phi^c$$

Это число определяет магнитный заряд. Определим тензор электромагнитного поля, используя калибровочно - инвариантное определение тХофта (здесь $n^a = \Phi^a / \sqrt{\Phi^c \Phi^c}$)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mu\nu} &= n^a F_{\mu\nu}^a - \epsilon_{abc} n^a D_\mu n^b D_\nu n^c \\ &= \partial_\mu (n^a A_\nu^a) - \partial_\nu (n^a A_\mu^a) - \epsilon_{abc} n^a \partial_\mu n^b \partial_\nu n^c, \end{aligned}$$

это замкнутая 2-форма. Магнитный заряд $/r \rightarrow \infty$, $D_\mu n^a \rightarrow 0$

$$P = \frac{1}{4\pi e} \int_{\mathbb{S}^2_\infty} \frac{1}{2} \mathcal{F}_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{1}{4\pi e} \int \frac{1}{2} \Phi^a F_{\mu\nu}^a dx^\mu \wedge dx^\nu = -\frac{Q}{e} = \frac{n}{2e}$$

поскольку поле $n^a A_\mu^a$ регулярно на сфере и не даёт вклада (фактор $1/e$ возникает из за переопределения величин).

$$\begin{aligned}
 \frac{e}{\Phi_0} E &= \int \left(\frac{1}{4} (F_{ik}^a)^2 + \frac{1}{2} (D_k \Phi^a)^2 + \frac{\beta}{2} (\Phi^a \Phi^a - \Phi_0^2)^2 \right) d^3x \\
 &= \int \left\{ \frac{1}{4} \left(F_{ik}^a + \epsilon_{iks} D_s \Phi^a \right)^2 - \frac{1}{2} \epsilon_{iks} F_{ik}^a D_s \Phi^a + \frac{\beta}{2} (\Phi^a \Phi^a - 1)^2 \right\} d^3x \\
 &\geq - \int \frac{1}{2} \epsilon_{iks} F_{ik}^a D_s \Phi^a d^3x = -\frac{1}{2} \int \{ D_s (\epsilon_{iks} F_{ik}^a \Phi^a) - \underbrace{\Phi^a D_s (\epsilon_{iks} F_{ik}^a)}_{=0 \text{ Bianchi}} \} d^3x \\
 &= -\frac{1}{2} \int \partial_s (\epsilon_{iks} F_{ik}^a \Phi^a) d^3x = - \oint \frac{1}{2} \Phi^a F_{ik}^a dx^i \wedge dx^k = 4\pi Q
 \end{aligned}$$

поэтому

$$E \geq E_{\min} = \frac{4\pi\Phi_0|Q|}{e}$$

где модуль возникает при внимательном рассмотрении.

Уравнения Богомольного

Предел Богомольного достигается если

$$F_{ik}^a + \epsilon_{iks} D_s \Phi = 0, \quad \frac{\beta}{2} (\Phi^a \Phi^a - 1)^2 = 0$$

где второе условие выполняется если $\beta = 0$. Первое условие даёт уравнения Богомольного, простейшее решение которых получается для сферической симметрии, когда поля

$$A = (1 - w(r)) T^a \epsilon_{aik} \frac{x^i}{er^2} dx^k, \quad \Phi = \phi(r) T^a \frac{x^a}{r} \Phi_0,$$

а энергия, учитывая что $\varepsilon = 0$,

$$\begin{aligned} E &= \frac{4\pi\Phi_0}{e} \int_0^\infty \left(w'^2 + \frac{(w^2 - 1)^2}{2r^2} + \frac{r^2 \phi'^2}{2} + w^2 \phi^2 \right) dr \\ &= \frac{4\pi\Phi_0}{e} \int_0^\infty \left\{ (w' + \phi w)^2 + \frac{r^2}{2} \left(\phi' + \frac{w^2 - 1}{r^2} \right)^2 + [\phi(1 - w^2)]' \right\} \end{aligned}$$

Полные квадраты не дают вклада если

Уравнения Богомольного для $Q = 1$

$$w' + \phi w = 0, \quad \phi' + \frac{w^2 - 1}{r^2} = 0, \quad E = \frac{4\pi\Phi_0}{e} \phi (1 - w^2) \Big|_0^\infty$$

допускают точное решение ([монополь Богомольного-Прасада-Соммерфилда \(БПС\)](#))

$$w = \frac{r}{\sinh(r)}, \quad \phi = \coth(r) - \frac{1}{r}, \quad E = \frac{4\pi\Phi_0}{e}$$

где $1 \leftarrow w \rightarrow 0$, $0 \leftarrow \phi \rightarrow 1$ при $0 \leftarrow r \rightarrow \infty$.

При $\beta \neq 0$ приходится решать уравнения второго порядка

$$w'' = \frac{w(w^2 - 1)}{r^2} + \phi^2 w, \quad (r^2 \phi')' = 2w^2 \phi + 2\beta r^2 (\phi^2 - 1) \phi$$

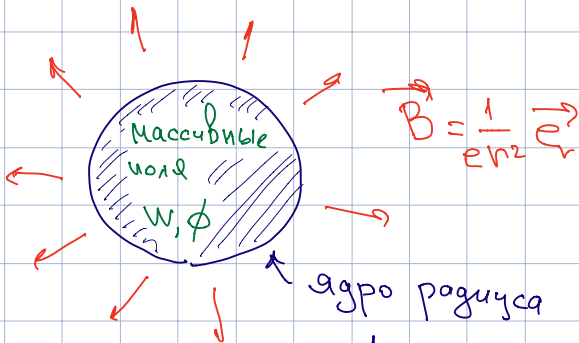
Их решение ([монополь тХофта-Полякова](#)) удовлетворяет тем же гран.условиям, но известно только численно. Его энергия

$$E = \frac{4\pi\Phi_0}{e} f(\beta), \quad 1 \leftarrow f(\beta) \rightarrow 1.96 \quad \text{при} \quad 0 \leftarrow \beta \rightarrow \infty.$$

Структура монополя

$$1 \leftarrow w(r) \rightarrow c e^{-r}$$

$$0 \leftarrow \phi(r) \rightarrow 1 + c_2 e^{-2\beta r}$$



$$r_0 \sim \frac{1}{e \phi_0} \sim \frac{1}{M_W}$$

$$E = \frac{4\pi \phi_0}{e} \sim \frac{M_W}{e^2} \sim 10^{16} \text{ GeV} = GUT$$

Возникновение монополей

- Они должны спонтанно генерироваться механизмом Киббла в фазовых переходах в ранней вселенной, **если только физика в ту пору описывалась Теорией Великого Объединения (ТОВ).**
- Поскольку параметры ТОВ очень большие, монополи должны быть очень тяжелыми, $M \sim 10^{16}$ ГэВ, и могли бы перевесить всю остальную материю.
- Но мы их не видим. Если бы они присутствовали, то они бы разгонялись галактическим магнитным полем, черпая из него энергию пока оно не исчезнет. Но поле существует, что налагает ограничение на концентрацию монополей – **предел Паркера.**
- Похоже, что если монополи существуют, то их очень мало. Это значит, что либо ТОВ не работают, либо их фазовые переходы не эффективны по каким-то причинам.

Аналитическое решение БПС очень простое, как гармонический осциллятор в квантовой механике, или как решение Шварцшильда. Поэтому оно рассматривается как некое базовое состояние в калибровочной теории поля. Оно также естественным образом возникает в теории струн. Поэтому существует огромное число теоретических исследований монополей.

Упомянем взаимодействие фермионов с монополем.

Спин из изоспина

Рассмотрим **изодублет фермионов в поле монополя**:

$$i\gamma^\mu \left(\partial_\mu - ie A_\mu^a \frac{\tau^a}{2} \right) \psi = 0 \quad \text{где} \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi^+ \\ \psi^- \end{pmatrix} \quad (*)$$

Можно разделить переменные, используя собственные функции углового момента. Для обычных фермионов

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \Rightarrow \text{минимальное значение } |\frac{1}{2}\rangle = |0\rangle + |\uparrow\rangle$$

поэтому $j_{\min} = 1/2 \Rightarrow$ есть центробежный барьер в начале координат. Для изодублета полный угловой момент состоит из орбитального момента, спина, и изоспина

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} + \vec{I} \Rightarrow \text{минимальное значение } |0\rangle = |0\rangle + |\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle$$

$\Rightarrow$ **нет центробежного барьера**, существует статическое, нормируемое решение $\psi(\mathbf{x}) =$ нулевая мода = **связанное состояние фермионов на монополе**.

Поскольку нет центробежного барьера, **задача рассеяния фермионов на монополе** допускает решение вида

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi^+ \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\omega(t+r)} + \begin{pmatrix} 0 \\ \psi^- \end{pmatrix} e^{i\omega(t-r)}$$

Здесь первый член соответствует входящему фермиону с изоспином вверх, а второй – выходящему фермиону с изоспином вниз. Иначе говоря, рассеяние фермионов на монополе приводит к перевороту изоспина, так что u -кварк превращается в d -кварк. Кварковый состав протона меняется и он распадается. С монополем же ничего не делается, он может дальше разрушать протоны = **монополярный катализ распада протона**. Поскольку рассеяние в s -секторе, сечение большое. Поэтому **монополей должно быть мало, иначе бы они разрушили все протоны**.

Что если нет новой физики ?

Солитоны в Стандартной Модели

Предположим, что есть только Стандартная Модель, и нет никаких её расширений. Тогда $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)^T \in \mathbb{C}^2$, вакуумное многообразие $\mathcal{V} : |\Phi_1|^2 + |\Phi_2|^2 = \Phi_0^2$ это сфера $\mathbb{S}^3 \Rightarrow$

- нет доменных стенок ($\mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathcal{V} = 0$)
- нет космических струн ($\mathbb{S}_1 \rightarrow \mathcal{V} = 0$)
- нет монополей тХофта-Полякова ($\mathbb{S}_2 \rightarrow \mathcal{V} = 0$)

Что остается ?

Сфалерон = солитоно-подобное, но неустойчивое состояние, возникающее в переходах с несохранением барионного числа.

Вортоны = вращающиеся петли, сделанные из сверхпроводящих струн. Должны существовать и быть устойчивыми, но пока это не подтверждено.

Узлы = перекрученные куски струн. Не изучены.

Осциллоны = долгоживущие осциллирующие состояния. Существуют, мало изучены.

$\mathbb{S}_3 \rightarrow \mathcal{V} = \mathbb{Z}$, что это может значить ?

Магнитные монополи в электрослабой теории

- **Монополь Дирака** – неустойчив относительно электрослабой конденсации.
- **Гантели Намбу** = монополь+антимонаполь, связанные куском космической струны и вращающиеся вокруг центра тяжести. Должны излучать $\Rightarrow$ конечное время жизни.
- **Монополь Чо-Мейзона** = монополь Дирака, погруженный в облако электрослабого конденсата. **Устойчив (!)**
[/Gervalle,Volkov, Nucl.Phys. B984 \(2022\) 115937/](#), но энергия бесконечна из-за кулоновской расходимости магнитного поля в нуле.
- **Гравитирующий монополь Чо-Мейзона** = чёрная дыра, окруженная электрослабым конденсатом. Устойчив, горизонт событий обрезает расходимость и делает массу конечной, хотя и превышающей массу Планка.
[/Gervalle,Volkov, Phys.Rev.Lett. 133 \(2024\) 17/](#) Возможно это единственный вид магнитного монополя, который реально существует в природе.

Если есть только Стандартная Модель и нет никаких её расширений, то пропадает ряд самых популярных солитонов. Однако, остаётся много места для других, которые могли бы быть космологически значимыми и давать вклад в Тёмную Материю. Это практически полностью неисследованная область.